교육학박사학위논문

한국 수석교사의 수학수업과 싱가포르 리드교사의 수학수업에서 나타난 사회수학적 규범에 대한 사례 연구

2017년 8월

서울대학교 대학원

수학교육과

조 형 미

한국 수석교사의 수학수업과 싱가포르 리드교사의 수학수업에서 나타난 사회수학적 규범에 대한 사례 연구

지도교수 권 오 남

이 논문을 교육학박사 학위논문으로 제출함

2017년 5월

서울대학교 대학원

수학교육과

조 형 미

조형미의 박사 학위논문을 인준함

2017년 7월

위 원 장 ______________________ (인)

부위원장 ______________________ (인)

위　　원 ______________________ (인)

위　　원 ______________________ (인)

위　　원 ______________________ (인)

국문초록

이 연구는 한국의 수학교실의 문화적 특성을 이해하기 위한 시발점이자, 수학교실 비교 연구에서 한국의 수학교실의 관심을 촉구하기 위한 필요성에 의해 진행되었다. 특히, 국제 학업 성취도 평가에서 우수한 성과를 보인 싱가포르에 대한 교육계의 관심이 증대 되고 있는 시점에, 한국과 싱가포르의 수학교실 사례의 교실 문화를 분석하였다.

수학교실의 문화적 특성을 해석하기 위하여, 구성주의 관점과 사회문화적 관점을 통합한 Paul Cobb의 사회수학적 규범을 중심으로 미시적인 교실 문화를 탐색하였다. 이 연구에서 사회수학적 규범은 교사의 특정한 중재 전략의 결과로 성취되는 수학적 문화로 국한 하지 않고, 교사에 의해 지지되는 규범, 메타인지, 문제해결을 위한 발견술 등을 포함한 개념으로 확장하였다. 또한 사회수학적 규범은 교실 구성원의 참여와 의미협상의 결과로 나타난 것으로 해석할 수 있으므로, 교실 공동체를 실천공동체 관점으로 해석하여, 사회수학적 규범이 실천공동체의 참여와 객체화의 과정에서 어떻게 나타나는지 해석하였다.

한편 교실 수업은 교사와 학생들의 미시적인 상호작용 뿐 아니라, 보다 바깥 수준에서 영향을 주고받는다. 교실 수준, 제도적 수준, 사회문화적 수준의 상황들은 서로가 분리되어 독립적으로 존재하지 않기 때문에 수학교실 문화는 학교와 제도, 그리고 보다 거시적 수준의 사회문화적인 상황으로부터 영향을 주고받는다. 이에 연구자는 수학교실의 미시적인 수학교실 문화의 특성으로 밝힌 사회수학적 규범을 좀 더 거시적인 관점에서 해석하였다. 특히 분석 자료로 수집될 수 있는 제도적 차원에 초점을 맞추어 국가 교육과정, 교과서 그리고 평가체제를 중심으로 해석하였다.

이 연구에 참여한 교사는 학교 현장에서 가르치고 있는 수학 교사 중에서 가장 상위 직위를 가지는 한국의 수석교사 1인과 싱가포르 리드교사 1인이다. 그리고 그 교사들에게 수업을 받은 한국의 중학교 3학년 학생들과 싱가포르의 중등학교 3학년 학생들이 참여하였다. 참여 관찰한 수석교사의 수업은 총 9차시로 다항식의 인수분해 단원 이었으며, 싱가포르 리드교사의 수업은 총 6차시로 합동과 닮음 단원이었다. 수업의 담화를 분석하여 각 교실의 사회수학적 규범을 밝혔고, 각 수업 사례에서 나타난 사회수학적 규범을 학교 밖의 제도적 차원과의 관련성을 해석하기 위해 각 국의 교육 관련 문서와 선행연구를 분석함과 동시에 연구참여자의 검증 인터뷰를 진행하였다.

한국과 싱가포르의 수학수업을 미시적으로 분석한 결과 두 수학수업 사례에서 나타난 사회수학적 규범은 8가지로 나타났다. 두 수업 사례에서 공통적으로 나타난 사회수학적 규범은 '수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범', '문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범', '무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대한 규범', '수학적으로 다른 아이디어에 대한 규범', '수학적 표현을 어떻게 쓰는 것이 좋은지에 대한 규범' 이다. 그리고 싱가포르에서만 나타난 사회수학적 규범은 '수학적 문제해결을 위해 어떻게 전략을 세울 것인지에 대한 규범'이며, 한국의 수학교실에서만 나타나 사회수학적 규범은 '어떤 문제가 더 좋은 문제인지에 대한 규범'과 '무엇이 수학교실에서 논의 될 만한 내용인지에 대한 규범'이다.

각각의 교실에서 나타난 사회수학적 규범의 다양한 양상을 비교하였고, 그러한 양상으로 나타난 사회수학적 규범이 학교 밖의 제도적인 현상 특히, 국가 교육과정, 교과서, 평가 체제 등과의 관련성을 분석하였다. '수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범'에 대해 한국의 수석교사의 수업은 싱가포르의 리드교사

의 수업보다 더 다양한 양상을 보였다. 두 교실에서 '수학적 용어를 정확하게 사용하기'라는 공통적으로 나타나는 양상이 확인 되었다. 수학적 용어의 엄밀한 사용에 대한 한국의 수석교사와 싱가포르의 수석교사의 관점은 각 나라의 국가 교육과정과 평가와 관련하여 설명되었다.

한국의 수석교사와 싱가포르의 리드교사의 수업에서 발현된 '문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범'의 양상들은 각 나라의 지필평가에서 기대되는 형식에 따라 표현 방법 및 형식의 엄밀성 등에 차이가 있음이 드러났다. 또한 싱가포르의 국가 교육과정에서 강조하는 문제해결과 메타인지 전략은 리드교사의 수업에서 주로 나타나는 사회수학적 규범을 형성에 영향을 준 것으로 분석되었다. 즉, 제도적 수준에서 교실이 처해 있는 교육과정이나 평가 체계는 교실의 미시적인 문화 현상인 사회수학적 규범의 발현에도 영향을 미치며, 좀 더 세부적으로 사회수학적 규범에서 보여주는 양상에 영향을 미치고 있는 것으로 분석되었다.

그동안 한국과 싱가포르의 수학교실은 동아시아 국가들과 동일한 특성을 가지고 있다고 해석되어 왔다. 그러나 이 연구의 결과는 그동안 동아시아 수학교실을 거시적인 사회문화적인 맥락으로만 접근해 유교문화에 영향을 받은 수업으로 해석하려는 시도의 방향키를 재조정할 필요가 있음을 보여준다. 즉 교사와 학생들이 교실 현장에서 만들어 내는 미시적인 교실 문화와 함께 거시적인 맥락이 논의 될 필요가 있음을 보여준다.

한국의 수석교사 1인의 수학수업과 싱가포르 리드교사 1인의 수학수업을 비교 분석한 이 연구는 한국의 수학교실을 다른 나라의 수학 수업과 비교 분석함으로써, 한국의 수학교실을 보는 내부자적 관점을 풍부하게 하며, 한국 수학교실의 특성에 대한 이해의 폭을 확장시킨다. 또한 이 연구는 국제적으로 한국의 수학교실을 알리기 위한 시도로 외부자의 관점에서 한국의 수학교실을 조망하

는데 도움을 줄 수 있을 것으로 기대한다.

주요어 : 교실문화, 사회수학적 규범, 실천 공동체, 수석교사, 리드교사
학 번 : 2011-30448

목 차

표 목차

그림 목차

I. 서론

1. 연구의 필요성

국제 수학수업 비교 연구는 TIMSS 비디오 연구와 Learners Perspective Study(LPS)가 대표적이다. TIMSS 비디오 연구는 1995년 시행된 제 3차 수학·과학 성취도 추이변화 국제 비교 연구(TIMSS, (Trends in International Mathematics and Science Study)에서 한국, 싱가포르, 일본, 홍콩의 동아시아 학생들이 예상외로 높은 성취를 보이면서 (Beaton, Mullis, Martin, Gonzalez, Kelly & Smith, 1996), 서구 특히 미국을 중심으로 자국의 수학·과학 교수의 문제를 진단하기 위하여 수행되었다. 1991년 벤쿠버에서 열렸던 첫 번째 TIMSS National Research Coordinators(NRC) 회의에서는 독일, 미국, 헝가리 등의 강세를 예상하였다. 일본을 제외한 동아시아 체제를 언급한 경우는 없었던 것으로 보아, TIMSS 1995 결과는 서구 사회에 큰 충격 이었던 것은 분명하다 (Leung, 2011). TIMSS 비디오 연구는 TIMSS 1995의 예상치 못한 학생들의 학업 성취결과를 설명하기 위해 수행되었고, 학업 성취에 가장 중요한 변인 중인 하나인 교실에서의 가르침에 대한 분석의 필요성을 바탕으로 수행되었다.

TIMSS 1995 비디오 연구는 TIMSS 1995에 참여한 나라 중, 미국, 독일, 일본을 대상으로 하였으며, 각 나라의 8학년 수학 교실을 수집하였다(Stigler, Gonzales, Kawanaka, Knoll, & Serrano, 1999)[1]. 수집된 수업들은 분 단위로 분석되었다. 학생들이 경험하게 되는 수학의 성격이 기능 중심인지 사고 중심인지가 코딩되었고, 수업이 일관성 있게 조직이 되었는지, 수학적 지식(개념적 지식 및 절차적 지식)이 교사에 의해 제시되었는지 아니면 개발되었는지, 학생들에게 기대되는 활동들은 무엇이었

1) TIMSS 1995에 참여한 학교의 표본에서 임의적 하위-표본을 추출하여 수업 비디오를 촬영하였다. 독일 수업 100개, 일본 수업 50개, 미국 수업 81개가 수집되었다.

는지, 그로부터 각 나라의 교수에 대한 문화적 패턴에 대하여 조사되었다. 즉, 국가의 수업을 관통하는 공통적인 특성이 무엇인지 조사되었다(Hiebert, Stigler, & Manaster, 1999).

각 나라의 교수에 대한 문화적 패턴에 대한 연구 결과, 일본 수업은 학생과 수학이 모두 중시되는 가운데 교사는 학생과 수학교과 사이를 매개하는 역할을 충실하게 수행하는 반면, 미국의 수업에서는 교사와 학생, 그리고 그들 사이의 상호작용만 존재할 뿐 수학 내용은 빈약하게 다루어진다고 진단했다. 그에 반해 독일의 수업에서는 교사가 수학내용을 잘 정련하여 적시에 적절한 설명을 제공하는 것으로 기술했다(박경미, 2007). 각 국가 내 교사들 사이에 개인차가 존재하기는 하지만, 국가의 수업을 관통하는 특징이 있다고 보았다.

TIMSS 1999 비디오 연구는 TIMSS 1995 비디오 연구를 확대한 후속 연구로 호주, 체코, 홍콩, 일본, 네덜란드, 스위스, 미국 7개국 8학년 수학 수업을 기술하고 비교하였다(Hiebert, Gallimore, Garnier, Givvin, Hollingsworth, & Jacobs et al., 2003)[2]. TIMSS 1999 비디오 연구는 각 나라의 객관적이고 관찰가능 한 교실의 교수를 측정할 수 있도록 교수 관행의 적절한 양적 지표를 개발하고자 하였다. 또한 나라별 수업의 특징(signature)과 교수 관행을 비교하고, 각 나라에서 수행되는 교수 관행의 패턴을 묘사하는 것을 목적으로 하였다.

특히, TIMSS 1995, 1999 비디오 연구에서는 가르치는 일을 문화적 활동으로 간주하고, 사회의 넓은 부분이 반복적으로 그리고 오랜 시간 동안 참여하면서 일어나는 사건으로 보았다. 즉, 각 나라의 수업 특징이 존재한다고 보았으며, 수업의 특징은 수업의 동적 구조를 제공하는 세 가지 차원, 즉 활동의 목적, 교실 상호작용의 유형, 내용 활동(content activities)[3]의 성격을 고려하여 분석되었다(Hiebert, Gallimore, Garnier, Givvin, Hollingsworth, & Jacobs et al, 2003).

---

2) 각 나라의 100개의 8학년 수학수업을 모집하는 것을 목표로 하였고, 일본 수업의 경우에는 TIMSS 1995 비디오 연구에서 수집된 50차시 수업 자료를 재분석 하였다. 최종적으로 638개의 비디오로 녹화된 수업을 수집하였으며, 양적으로 질적으로 분석하였다

3) 수학적 조직, 비-문제 수학적 작업, 답하는 문제 등이 내용 활동을 구성한다.

수학 수업에 대한 국가적 패턴에 대한 분석이 이루어지며, 문화 스크립트(Stigler & Hiebert, 1999), 수업의 특성(Hiebert et al., 2003)과 같은 이론적 개념이 각 나라의 수업에서 확인된 규칙성을 설명하기 위해 도입되었다. 교사가 수학을 지도할 때에 한 나라의 교사들이 공유하는 패턴이 있으며, 그것이 교육의 문화 스크립트라고 보았다. 이러한 개념이 수학교육을 넘어서 교육에 관한 국제 담론에서 광범위하게 채택되었지만, 문화 스크립트라는 것의 견고성과 관련하여 여전히 중요한 질문이 남아있었다. 그것은 국가적으로 존재하는 것으로 보이는 문화 스크립트는 교사들 사이에서 어느 정도 유지되고, 어느 정도 변화되는가. 문화적 차이가 아니라 교사의 유형과 관련된 좀 더 전반적인 스크립트가 존재하는 것은 아닌지에 대한 질문들 이었다.

LPS는 이러한 문제에 답하기 위해서, 각 국가의 수업 특징을 잘 드러낼 수 있는 능숙한 교사 3명을 선정하고, 교사 당 10차시 이상의 연속된 수업을 분석하였다. 교실의 수업 양상은 수업 내용에 의존하며, 연속된 수업차시에서 그 수업이 어디에 위치하는지에 따라 교사가 교실에서 구현하는 활동이 달라지기 때문에, LPS는 100명의 교사로부터 1차시씩 촬영된 수업을 바탕으로 분석된 TIMSS 비디오 연구는 수업의 실체를 온전하게 드러내기 충분치 않았고 보았다(Clark et al., 2007).

LPS역시 TIMSS 비디오 연구와 마찬가지로 8학년 학생을 대상으로 하였으며, 연구를 전체적으로 주관하는 호주를 비롯하여 중국(상하이, 홍콩), 체코, 독일, 이스라엘, 일본, 한국, 필리핀, 싱가포르, 남아프리카공화국, 스웨덴, 미국, 영국 총 13개국이 참여하였다(Clark, Keitel, & Shimizu, 2006). TIMSS 비디오 연구는 미국의 NSF(National Science Foundation)의 지원을 받아 진행된 반면, LPS는 각국의 연구자들이 자체적으로 연구비를 마련하여 참여하는 형식으로 진행되었다. 수업 자료 수집 차원에서는 각 국가가 동일한 철자와 형식을 따랐지만 각 국 수업에 대한 연구문제는 각 나라의 연구자가 설정하여 연구를 진행하였다(박경미, 2007). LPS는 각 국가의 수업을 자신의 문화 및 학교 시스템 내부자인 각 국가의 연구자가 나름의 관점으로 분석할 수 있게 했다. 또한

TIMSS 비디오 연구는 교사의 교수에 초점을 맞추었던 반면, LPS에서는 학습자의 관행도 동시에 조사하였다. 한 나라의 수업이 문화적 특성을 나타내는지, 또한 교사가 사용하는 특정한 수행의 다양성과 일관성에 대해 조사되었다. 그리고 수학 교실에 학생의 해석, 그들에 의해 구성된 사회적 의미 그리고 수학적 의미 등을 연구하였다(Clark, Keitel, & Shimizu, 2006). LPS는 연구자에 의해 청킹된 수업의 에피소드를 수업 단위(lesson unit)로 불렀고, 그것을 분석의 단위로 하였다. 각국의 수업들은 수업의 구조, 특별한 수업 사건(lesson events)의 형태와 기능, 과제의 구조, 그리고 교실 상호작용의 패턴, 교사와 학생의 의도와 행동의 근거 등에 대하여 분석되었다. LPS의 연구 결과는 각 나라의 연구자들이 자신의 나라의 수학수업을 분석한 연구와(Clark, Keitel, & Shimizu, 2006), 다른 나라와 비교한 연구 두 차원으로 이루어 졌는데(Clark, Emanuelsson, Jablonka, & Mok, 2006; Yoshinori, Kaur, Huang, & Clarke, 2010; Shimizu, Kaur, Huang, & Clarke, (2011); Kaur, Anthony, Ohtany & Clarke, 2013), 아쉽게도 한국의 수학교실에 대한 비교 연구는 LPS 연구에서 진행되지 못하였다.

내부자의 관점에서 분석된 한국 수학수업의 특징은 유교문화권 아래서 동아시아 수학교육의 성격을 공유하고 있는 것으로 분석되었다(Park & Leung, 2006). 한국의 수학수업을 TIMSS 비디오 연구에서 밝힌 홍콩과 일본이 공유하고 있는 문화적 성격과 비슷한 성격으로 해석한 것이다. 한국이 TIMSS 비디오 연구에 참여하지 않았기 때문에, 한국의 수학교실은 국제 비교 연구에서 그동안 관심을 받지 못하였지만, LPS를 통해 한국의 수학교실의 데이터를 국제적으로 공유했다는 점에서 의미가 있다. 그러나 LPS에서 한국 수학교실의 고유한 문화적 특성에 대한 논의가 충분하게 진행되지는 못했고, 다른 나라와 한국의 수학수업이 충분하게 비교 연구되지 못했다는 한계가 있다.

일본의 레슨 스터디(Fermandez & Yoshida, 2004)나 중국의 변이이론(Gu, Huang & Marton, 2004)은 각 나라에서 발견되고 강조되는 수학교육의 독특한 특성으로 연구되고 있으며, 홍콩의 수학교실은 동아시아 국

제 비교연구에서 주로 분석의 대상이 되어왔다. 그러나 한국의 수학교실에 대한 국제적 관심은 매우 부족한 편이며, 앞서 설명한 바와 같이 여전히 유교문화권 아래 동아시아 수학교육의 특성을 공유하는 것으로 설명되고 있을 뿐이다(Park & Leung, 2006; 박경미, 2007; Leung, 2011). 이러한 접근은 한국 수학교육의 정체성을 지나치게 단순화 시킬 우려가 있다(Kwon & Cho, 2012). 따라서 한국의 수학교실을 국제적으로 비교 분석함으로써, 한국의 수학교실에 관심을 촉구하며, 궁극적으로 우리 스스로 한국 수학교실의 특성을 이해하기 위한 노력이 필요하다.

이 연구는 한국 수학교실을 다른 나라의 수학교실과 비교하여, 한국의 수학교실의 문화적 특성을 이해하기 위한 시발점이자, 향후 수학교실에 대한 비교 연구에서 한국의 수학교실의 관심을 촉구하기 위한 필요성에 의해 진행된다.

2. 연구의 목적

다양한 수업 상황에서 수학 수업현상을 분석한 연구들은 교실 수업이 특정한 사회문화적, 역사적, 제도적 특성을 반영한 하나의 사회적 결정체라는 점을 밝혀 주고 있다(e.g., Alexander, 2000; Fernandez & Yoshida, 2004; Ma, 1999; Stigler & Hiebert, 1999). 즉, 한국의 수학교실의 문화적 현상은 한국의 상황을 반영한 하나의 사회적 결정체이라는 것이다. 한국의 수학교실의 문화적 현상에 대한 연구는 동아시아의 교육문화의 맥락아래서 분석하려는 시도들이 있어왔다.

수학교육에서 교육의 문화적 특성을 연구한 연구자들은 한국과 싱가포르는 동아시아 국가의 성격을 공유하고 있다고 분석한다. 국제 비교 연구에서 우수한 성취를 보이는 한국, 중국, 일본, 대만, 홍콩과 함께 그 현상을 설명하기에 싱가포르는 동아시아[4] 국가적 성격을 가진 나라로 분

4) 여기서 동아시아와 서양이라는 구분은 지리적인 구분이라기보다는 유교적 전통을 가진 나라를

류되곤 하였다. 몇몇 연구들은 동아시아 수학 교육의 특징을 유교문화에 근간을 두어 설명 하였다(Leung, 2001). 왜냐하면 동아시아에서 유래한 여러 철학적 논의들 가운데 유교가 동아시아 교육의 전통적 흐름을 창출하고 나아가게 하는 철학적 기반으로서 가장 뚜렷하게 기능을 하고 있다고 보았기 때문이다(Huang & Leung, 2004).

한국과 싱가포르가 모두 국제 학업성취도 평가 등에서 비슷하게 우수한 성적을 띄고 있고 관계 중심 집단주의 문화권에 속해 있지만, 한국과 싱가포르의 수학교육의 문화적 특징을 유교문화를 중심으로 일괄적으로 해석하기 힘든 점이 있다. 왜냐하면, 나라마다 사회경제구조와 상황이 다르며, 교육의 목적이 다르고, 교육과정의 변화 시기도 다르며, 서구 학습 이론의 도입과 시행방식이 차이가 나는 만큼 한국과 싱가포르의 수학교실을 동아시아 수학교육의 특징으로 단순히 해석할 수는 없다. 특히, Kwon & Cho(2012)는 유교문화전통으로 한국의 수학교실을 해석하는 것은 한국 고유한 수학교육의 특성을 간과하는 것임을 지적하며, 한국 사회의 특정 문화적 맥락에서 이루어지는 교육의 기능과 목적, 교사와 학생들의 역할 등에 관심을 가질 필요가 있음을 지적하였다.

그동안 동아시아 수학교육 연구의 촉매가 되었던 국제 학업성취도 비교 연구들은 모순적이게도 한국과 싱가포르 수학교육에 내재된 문화적 차이의 가능성을 보여주기도 한다. 특히, OECD에서 주관하며, 2000년부터 매 3년마다 만 15세 학생을 대상으로 읽기, 수학, 과학 분야에서 지식을 활용할 수 있는 소양을 평가하는 국제 학업 성취도 평가(Programme for International Student Assessment, 이하 PISA)에서 수학이 주 영역이었던 2012년[5] 연구 결과는 두 나라의 차이를 극명하게 보여주었다. PISA 2012는 수학에 대한 학생들의 정의적 영역에 대해 조사하였는데, 한국의 학생들은 우수한 학업성취도에 비해 대조적으로 부정적인 수학 학습태도의 문제가 드러났다.

동아시아로 그리스/라틴/기독교 중심의 전통을 공유하는 나라를 서양으로 부르며 북미, 유럽, 호주 등을 일컫는다(Leung, 2006).

5) 수학이 주 영역이었던 때는 2003년과 2012년이며, 싱가포르는 PISA 시행 3년차인 2009년부터 참여하기 시작하였다.

높은 수학 학업 성취도와 낮은 정의적 태도는 중국, 대만 일본의 학생들에게서 공통적으로 나타났으나, 동아시아 수학교육의 정체성을 공유하고 있는 것으로 간주되었던 싱가포르의 학생들에게서는 학업 성취도 뿐만 아니라, 정의적인 영역에서도 비교적 긍정적 결과가 보고되었다[6]. 최근 PISA 2015에서 한국 학생들의 수학적 소양에 대한 평가는 전년도 대비 3위~4위정도 추락하였고, TIMSS 2015 결과에서도 초등학교 4학년과 중학교 2학년 학생들의 성취도 순위가 2011년에 비해 한 단계씩 하락하였으나, 싱가포르는 두 국제비교평가 모두 세계 1위를 기록하면서 국제적으로 싱가포르 교육에 대한 관심은 또다시 증대 되고 있다.

이 연구는 한국과 싱가포르의 수학교실의 수업 사례에서 나타나는 교실 문화의 특성을 밝히고자한다. 수학교실의 문화적 특성에 대해 논하기 위해서는 먼저 문화라는 개념을 명확히 할 필요가 있다. 이 연구에서는 넓게 받아들여지고 있는 의미로 문화를 이해하며, 문화를 한 그룹의 구성원들이 공유하는 다양한 믿음과 활동으로 간주한다(Thomas, 1996). 문화에 대하여 여러 가지 과학적 정의들이 통용 되고 있지만, 일반적으로 두 가지 관점이 강조되는데, '첫째, 문화는 집단 구성원 간에 공유되는 생각의 집합으로 간주한다. 이러한 생각은 집단 구성원의 행동을 안내하고 자신의 경험에 대한 공통적인 해석틀을 제공한다. 둘째, 문화는 종종 집단 구성원들이 공유하는 생각을 구현하는 관습(customs) 집합으로 간주된다(Levine & Moreland, 1991, p. 258).' 여기서 관습은 루틴, 의식(rituals), 설명(account), 용어(jargon) 또는 기호로 분류 될 수 있다. 사고 방법, 신념, 공유된 행동의 패턴 외에도 도구 및 언어와 같은 인공물, 규범, 가치 및 제도들도 문화로 고려 할 수 있다.

학습, 앎, 교수에 관한 새로운 이론들은 문화와 관련 되는 이론적 문제를 보다 명확하게 다루면서 인식론적 관점을 문화와 통합하기 위해 노력해왔다(e.g., Brown, Collins, & Duguid, 1989, Lave & Wenger, 1991; Cobb & Yackel, 1996). 수학교실의 문화적 특성은 두 가지로 접근할 수

6) 2012년 수학에 대한 정의적 영역은 내적동기, 도구적 동기, 자아 효능감, 자아개념, 수학 불안감 등의 영역에서 조사되었고, 상가포르는 각 영역에 0.83(3), 0.4(9), 0.47(3), 0.22(9), 0.16(29)의 점수(순위)를 보였다.

있다. 수학교실 문화를 수학교실의 구성원이 공유하고 있는 생각의 집합으로 간주하여, 수학교실에서의 수학학습의 경험을 해석하는 틀로서 접근 할 수도 있고, 좀 더 넓게 수학 교실의 구성원이 속해 있는 더 넓은 집단이 가지는 인공물, 제도 등으로 접근할 수 있다. 전자는 수학교실에서 일어나는 미시적인 상호작용의 패턴으로, 후자는 교실 밖의 사회적, 제도적, 역사적인 특성을 반영한 문화적 특성에 대한 해석이 될 것이다.

수학교실에서 발현하는 미시적 교실 문화에 대한 연구는 Paul Cobb의 일련의 연구들이 잘 설명하고 있다(Cobb, 1999; Yackel, Gravemeijer & Sfard, 2011). Paul Cobb은 사회적인 관점에서 수학교실문화의 세 가지 주요 개념으로 교실의 사회적 규범, 사회수학적 규범, 교실의 수학적 관행을 제안하였다. 규범은 사회적으로 구성된 개념으로 한 집단에 의해 공유된 것으로 받아들여지는 이해나 해석을 의미한다(Terry & Hogg, 1996). 또한 규범은 개인적인 것이 아니라 공동체적 개념으로 교실 안에서 형성되는 기대와 의무를 묘사한다(Yackel, 2004). 한 집단에서 어떤 규범들이 형성되는가는 구성원들이 가지는 가치나 신념과 연결되며 (Cobb & Yackel, 1996), 동시에 구성원들 간의 사회적 관계, 집단의 권력구조 등이 함께 반영되는 것으로 교실 문화를 이해하고 분석하는데 매우 중요한 개념이다. 사회수학적 규범은 학생들의 수학 활동에 독특한, 전체수업 토론의 규범적 양상으로 교실의 상호작용 하는 과정에서 발현하는 수학적 활동 방법에 대한 사회적 관점으로 수학적 내용이나 주제에 관계없이 수학교실에서 발현하는 문화적 특성이다. 이 개념은 수학교실에서만 독특하게 나타나는 미시적인 교실문화를 설명한다. 또한 사회수학적 규범은 수학적 설명과 정당화에 관련된 것으로 그 교실의 수학 교수학습의 질을 반영한다는 점에서 중요하다.

수학교실을 사회수학적 규범이라는 미시적인 관점으로만 분석하면, 수학교실에서 교사와 학생에 의해서 발현되고 만들어지는 문화로만 해석되게 된다. 따라서 이 연구에서는 미시적 교실 문화와 제도적인 현상과 관련성에 초점을 둔다. 교수 학습을 문화적 관행으로 고려할 때, 한국의 수학 교육적 실천은 한국 사회의 문화적 맥락에서 이루어지는 것이며 여기

에는 교육의 기능과 목적, 학교에서 추구하는 지식의 종류 및 교사 그리고 학생들의 역할 등에 대해 고려할 필요가 있다(Kwon & Cho, 2012). 따라서 이 연구는 한국과 싱가포르의 수학교실 문화를 사회수학적 규범이라는 미시적인 문화적 현상을 밝히고, 그것이 제도적 차원에서 어떤 연관성을 가지는지 탐색한다.

3. 연구질문

이 연구는 한국과 싱가포르의 수학 수업 문화를 이해하기 위해 미시적인 상호작용과 더불어 좀 더 거시적인 제도적 차원의 특성을 함께 고려한다. 즉 각 나라의 수학교실의 사회수학적 규범은 어떤 특성이 있으며, 그리고 그것이 각 나라의 맥락에서 어떤 특성을 드러내는지를 탐색하고자 한다.

이를 위해 각 나라의 일상적인 수학수업에 관심을 두고, 그 수학수업을 비교하고자 한다. 따라서 각 나라의 수학교실의 사건과 현상에 대해 심층적으로 연구하는 질적 사례연구를 한다. 이 연구는 일상적으로 수행되는 수학수업을 연구의 대상으로 삼았기 때문에, 엄격한 의도적 표본추출이 필요하지 않았다. 다만, 각 나라의 수업에서 해석을 위한 풍부한 정보를 제공 할 수 있는 수업이 무엇일지가 가장 중요하게 고려되었다.

이를 위하여, 한국의 수석교사와 싱가포르의 리드교사를 연구의 참여자로 선정하였다. 따라서 이 연구는 다음과 같은 연구 질문을 가진다.

첫째, 한국의 수석교사의 수학수업 사례에서 나타난 사회수학적 규범은 무엇인가?

둘째, 싱가포르의 리드교사의 수학수업 사례에서 나타난 사회수학적 규범은 무엇인가?

셋째, 한국의 수석교사 수학수업과 싱가포르 리드교사 수학수업 사례에서 나타난 사회수학적 규범의 공통점과 차이점은 무엇인가?

Ⅱ장에서는 수학교실의 문화적 특성을 이해하기 위해 이론적인 논의를 할 것이다. 이 장에서는 수학교실을 미시적으로 이해하기 위해 사회수학적 규범에 대한 설명과 함께, 거시적인 관점을 해석하기 위한 개념적 분석틀을 제공한다.

Ⅲ장에서는 한국과 싱가포르의 수학교실을 이해하기 위한 사회문화적 배경을 서술함으로써 교실에서 나타난 사회수학적 규범을 각 나라의 제도적 차원에서 해석 할 수 있는 정보를 제공할 것이다.

Ⅳ장은 연구방법을 서술한다. 수학수업 사례에서 나타난 사회수학적 규범을 밝히기 위해서, 교실의 담화분석 방법과 두 사례의 사회수학적 규범을 비교하기 위한 일화적 관찰방법에 대해서 서술하고, 연구참여자 검증 절차과정을 서술한다.

Ⅴ장은 각 연구 질문에 따라 결과를 서술하며, Ⅵ장은 연구결과를 바탕으로 한국과 싱가포르의 수학수업의 특성과 관련된 논의를 서술한다.

4. 용어의 정의

- **사회수학적 규범 (Sociomathematical norm)**

수학교실에서 일어나는 미시적인 교실 문화의 한 양상으로 1996년 Paul Cobb에 의해 개념화 되었다. 사회수학적 규범은 “학생들의 수학 활동에 독특한, 전체수업 토론의 규범적 양상”(Cobb & Yackel, 1996, p.178) 또는 보다 포괄적으로 “수학적인 활동과 담화에 관한 기준”(Cobb, 1999, p.9)으로 정의된다.

사회수학적 규범은 학생들이 수학교실 활동에 참여하면서 어떻게 수학에서 지적 자율성을 발달시키는지 설명하는데 있어서 중요한 개념으로

대두 되었고, 타 교과로도 연구가 확장되었다. 특히 사회수학적 규범의 개념을 과학 교육 상황에 차용하여 사회과학적 규범으로 재정립하기도 하였다(Driver, Newton & Osborns, 2000; Yun & Kim, 2015).

이 연구에서 사회수학적 규범은 교사의 특정한 중재 전략의 결과로 성취되는 수학적 문화로 국한 하지 않고, 교사에 의해 지지되는 규범, 메타인지, 문제해결을 위한 발견술 등을 포함한 개념으로 확장하였다.

- **객체화 (Reification)**

이 연구에서는 실천공동체에서 논의하고 있는 객체화이 의미를 따른다. 객체화는 추상적인 것을 마치 실체가 있는 것처럼 대한다는 것을 뜻하고, 공동체에서 경험하는 것에 형태를 부여하는 과정을 의미한다(Wenger, 1998). 개인이 공동체 내에서 경험에 대한 의미를 생성하는 과정은 참여와 객체화가 끊임없이 작용하면서 발생하는데, 객체를 만들어 냄으로써 경험에 대해 형태를 부여하게 되고, 그 형태 때문에 자신이 무엇을 경험하는지를 결정하게 된다.

II. 수학교실의 문화적 특성

수학교육에서 문화와 관련된 연구들은 가치, 정체성, 행위주체성 (agency) 등을 포함하는 문화 심리학에서 비롯된 것뿐만 아니라 사회적, 비판적, 정치적 차원을 포함하는 논의로 더욱 넓어졌다. 1988년 Bishop 은 그동안 학교에서 가르쳐지는 수학에 대해 문화와 가치에 독립적이라는 지배적인 생각을 부정하며, 수학교육 연구에 통찰을 제공하였다 (Presmeg, 2007). Bishop(1988)은 교수 학습과 관련하여 의사소통의 기능을 강조하며 다음과 같이 문화를 정의하였다.

> 문화는 공유된 이해의 복합체로 이루어져 있는데, 공유된 이해는 타인과의 의사소통에서 개인의 마음이 상호작용하게 하는 매개체로서 역할을 한다(p.5).

한편 Taylor(1996)는 위와 같은 문화의 관점으로는 시간이 지남에 따라 변화하는 문화의 역동적인 측면이 부각되지 않음을 지적하였다. 그는 우리가 우리 스스로 만들어온 "중요성의 망(web of significant)"(p.5)으로 문화를 보며, "잠재적 변형적 견해"를 제안하였다. 이 잠재적으로 변형적인 견해는 수학교실에서 발현되는 사회적 규범과 사회수학적 규범의 협상과 그 맥을 같이 한다(Cobb & Yackel, 1995). 이러한 규범들은 획일적이거나 정적이지 않고, 협상됨에 따라 지속적으로 진화하며, 각기 다른 교실에서 서로 다르게 나타난다는 것이다.

이 장은 수학교실의 문화적 특성을 이해하기 위한 교실 안의 미시적 교실 문화와 교실 밖에서 수학교실에 영향을 주는 거시적 관점을 살펴봄으로써 한국과 싱가포르의 수학교실을 분석하기 위한 관점을 모색한다. 수학교실 밖에서 교실에 영향을 주는 사회적, 제도적으로 거시적 측면에서 수학교실의 문화를 해석은 Bishop(1988)의 관점을 따르고, 구성원들의 참여와 협상의 과정에서 발현되는 사회수학적 규범은 변형적이고 역동적인 개념을 따른다.

1. 상징적 상호작용 관점에서 미시적 수학교실의 이해

수학교실 안에서 발현되는 미시적인 문화적 현상을 밝히기 위해서, 관찰 가능한 교실 내 상호작용을 교실의 문화의 분석의 단위로 한다. 상호작용은 상호작용 하는 주체가 그 과정에서 어떤 의미를 구성했느냐가 중요하게 대두 된다. 상호작용하는 그 안에서만 나타나는 이해는 그 대화 안에서 해석 될 수밖에 없다. 따라서 교실 상호작용에 대한 연구는 교실 대화가 내포하는 의미를 파악하면서 교실이라는 특정한 제도 안에서는 말을 주고받는 교환의 패턴이나 말의 사용의 고유한 방식이 연구되었다. 수학 교실에서 일어나는 상호작용은 탐구 지향적 수업에서 나타나는 담화의 패턴의 연구와 전통적인 수학교실과 개정된 교실에서 나타나는 담화의 특성이 비교 분석되었다.

가. 수학교실의 상호작용 패턴

교사와 학생들의 복잡한 해석적 행위들을 분석하기 위해 교실의 대화를 분석한 McHoul(1978)에 의하면, 교실에서 사용되는 대화의 패턴이 일상적인 대화의 그것과는 다르다고 보았고, 교실에서의 대화의 패턴에서 나타나는 4가지 규칙을 제시하였다.[7] 이러한 특성은 교사와 학생이라는 사회적 지위에 따른 차별화된 참여권리가 교실의 대화 속에 반영된 결과로, 대화의 패턴을 밝힘으로서 교실에서 잠재되어있는 지위의 문화를 해석하였다.

초등 수학 수업에서 시간적으로 인접한 두 발화인 인접쌍 현상에 대하여 분석한 Mehan(1979)은 수학교실의 대화에서 지배적으로 나타나는 질문-대답-평가(IRE)라는 순서의 조직을 밝혀냈으며, 교실 수업의 상당 부

7) (1)간격과 쉼이 나타날 가능성이 많다. (2)서로의 말이 중복될 가능성은 최소화 한다. (2a)교사 혹은 학생이 자신의 선택에 의해 스스로 시작한 학생에게 말을 건낸다는 것은 납득될 수 있는 행위로 간주되지 않는다. (2b)한 학생이 현행 화자에 의한 다음 차례 선택 기법대로 다른 학생을 선택한 다는 것은 납득 될 수 있는 행위로 간주되지 않는다. (3)차례 교환의 가능성은 최소화 된다(McHoul, 1978, p.189)

분은 질문과 대답의 연속이라고 보았다.

그 후로도 수학교실에서 나타나는 대화의 패턴의 연구는 계속되었다. 교사가 학생이 답을 할 수 있도록 질문의 범위를 좁혀가는 깔때기 질문 패턴, 학생들이 대화에 적극적으로 참여하게 하며 과제에 집중할 수 있도록 하는 초점 질문(Bauersfeld, 1988; Voigt, 1985)이 수학교실의 상호작용 패턴으로 발견되었다. 그러한 상호작용이 학생들의 학습에 미치는 영향과 함께 조사되었고, 깔대기 패턴의 상호작용은 학생들을 수동적인 학습자의 역할을 기대하게 하는 반면, 초점 질문의 패턴은 학생들이 중요한 부분을 탐구할 수 있게 한다고 조사되었다. 대화의 인접쌍에 대한 연구도 활발히 진행되었고, 학생들에게 새로운 생각을 던져주면 학생들의 반응을 정교화하고 수정해 나가는 유도-반응-정교화(ERE), 또는 제안-토론의 순환하는 상호작용의 패턴을 발견하기도 하였다(Wood, 1994).

Wood, Williams & McNeal(2006)은 전통적인 수학교실과 개정된 수학교실의 상호작용 패턴을 분석하고 그것이 학생들의 수학적 사고에 어떤 영향을 미치는지 둘 사이의 관계를 조사하였다. 언어화된 교실의 논의와 상호작용 패턴은 IRE 패턴, 깔대기 패턴, 초점 질문 외에도 기대되는 정보 제공, 교사의 설명, 답에 대한 힌트 등 다양한 교실의 활동과 혼재되어 분석되었다. 이러한 상호작용의 유형이 전통적이 수학교실과 개정된 수학교실과는 다른 특징이 있음을 밝히고, 학생들의 수학적 사고 사이의 관련성을 탐구한 결과 학생들의 수학적 사고의 복잡도의 증가는 상호작용의 패턴 유형과 깊은 관계가 있음을 밝혔다.

Kwon 외(2008)는 탐구지향 수학수업에서 나타나는 교사의 담화의 형태를 조사 하였고, 그것을 재성(revoicing), 발문, 설명, 운영의 네 가지 범주로 분석하였다. 특히, 재성은 탐구지향 수학수업에서 수학의 공동구성에 필수적인 역할을 한다고 보았으며, 재성을 통해 학생들의 논증을 보다 분명하고 명백하게 할 수 있다고 분석하였다. 또한 논증의 상황 속에서 맥락화된 교사의 발문을 분석하고 교사의 발문을 평가, 정교화 요청, 사고의 설명 요청, 사고의 정당화 요청으로 범주화하였다.

위와 같은 연구들은 전통적인 수학교실과 비교하여 교사와 학생간의

상호작용이 활발한 교실에서 나타나는 담화의 특성을 비교 분석함으로써, 탐구지향적 수업 문화를 형성할 때 요구되는 교사의 역할에 대한 논의로 확장할 수 있게 하였다.

미시적 교실 문화를 분석하는 연구는 대화의 패턴 외에도 교실 활동이나 교수 이벤트가 분석의 단위가 되기도 하였다. Hufferd-Ackles, Fuson & Sherin(2004)은 수학교실에서 나타나는 상호작용을 조사하였다. 그들은 '질문하기', '수학적 사고를 설명하기', '수학적 아이디어 자원의 근원두기' 그리고 '수학적 논의를 이해하기' 네 가지 상호작용을 확인하였다. 그리고 그것을 교사와 학생의 참여의 종류에 따라 4수준으로 나누었는데, 0수준에서 3수준으로 발전하면서 질문, 설명, 추론 및 이해가 교사에서 학생들 간의 공유로 이동하는 것으로 분석하였다.

Tsay, Judd, Hauk & Davis(2011)는 대학 수학강좌에서 나타난 교실 담화의 목적을 분석하였다. 대학 수학교실의 담화의 목적을 '강의', '사회수학적 규범의 협상과 의미형성', '사회적 규범의 협상', '갈등의 확대 및 해결'이라는 4가지로 확인하였다. 특히, '사회수학적 규범의 협상과 의미형성'과정은 전체 수업의 25%를 차지하는 것으로 분석되었고, 이때 나타나는 상호작용의 모습의 단계를 분석하기도 하였다. 교수에 의해 교수와 함께 논의에 참여하도록 학생을 독려하는 시작(initiation) 단계, 학생들이 교수에게 응답을 하는 대답(reponses) 단계, 교수가 말로 학생들의 표현을 다시 말 하거나 다른 아이디어와 연결시키거나 조직하는 후속 조치(follow-up) 단계, 그리고 교수가 학생들에게 수학적 표현이나 그 연결에 대해서 논쟁하고 근거를 들도록 독려하는 재-시작(re-initiation) 단계로 분석하였다. 대학수학교실에서는 IRF 상호작용의 패턴이 주로 나타나는데, 그것이 한 번 또는 두 번 정도 반복되는 재귀적 성격이 있음을 설명하였다.

학습자 중심수업을 진행하는 수학교실에서 나타나는 교실의 상호작용의 특성을 설명하기 위해, 사회적 관점과 심리학적 관점에서 분석한 Paul Cobb은 수학교실의 수학적 활동을 그 교실 안에서 발현되는 문화로 보았다. 그는 수학학습을 개인의 능동적인 수학 지식의 구성과정과

수학적 관행으로의 문화화과정으로 보는 발현적 관점에서 출발하여, 수학교실의 미시적 문화를 이해하였다.

나. 교실의 수학적 활동과 학습에 대한 해석틀: 발현적 관점

Yackel, Gravemeijer & Sfard(2011)는 지난 20년간의 Cobb의 작업의 진화와 통찰의 과정을 추적하였다. Cobb은 초기 구성주의 틀 안에서 개별적 학생들이 특정한 수학적 내용을 개념적으로 어떻게 이해하는지를 분석하는 것이었으나(Cobb & Steffe, 1983), 학생들의 수학 학습이 상황과 분리 되지 않음을 발견하면서(Cobb, Wood, & Yakel, 1993) 심리학적 구성주의의 관점을 확장하였다. 심리학적 구성주의의 관점을 확장하기 위하여 상징적 상호작용론과 민족방법론을 참조하였다. 상징적 상호작용론은 이해나 해석에 의한 자기표시의 과정이나 그것들의 유의미한 상징에 따라 행하게 되는 동태에 특별한 주의를 기울이며, 다음의 세 가지를 가정한다. 첫째, 언어를 중심으로 하는 상징을 매개로 한 인간의 상호작용은 대상이 가지는 의미에 바탕을 두고 행동을 하며, 둘째 그 대상의 의미는 사회적 상호작용의 산물이라고 본다. 마지막으로 대상이 가지는 의미는 개인이 그것을 해석하는 과정을 통해 변화 되어 간다는 입장을 가진다(Blumer, 1969).

구성주의와 사회문화적 관점의 통합의 의미는 학생 개인의 학습에 관한 분석과 그 학습이 일어나는 사회적 과정을 연결하고 있다는 것이다. Cobb & Yackel(1996)은 사회적인 관점으로 수학교실문화의 세 가지 주요 개념으로 교실의 사회적 규범, 사회수학적 규범, 교실의 수학적 관행을 제안하였고, 심리적인 관점에서 각각에 대하여, 자신과 타인의 역할과 학교 활동의 전반적인 본질에 관한 신념, 수학적 신념이나 가치, 그리고 수학적 개념과 활동을 제안하였다. 규범은 사회적 구성개념으로 한 집단에 의해 규범적이거나 공유된 것으로 받아들여지는 이해나 해석을 의미한다. 따라서 규범은 개인적인 것이 아니라 공동체적 개념이며 교실에서 규범을 묘사하는 방법은 교실 안에서 형성되는 기대와 의무를 묘사하는

것이라 할 수 있다(Terry & Hogg, 1996; Yackel, 2004).

<표 Ⅱ-1> 수학적 활동과 학습을 분석하기 위한 해석적 틀(Cobb & Yackel, 1996)

사회적 관점	심리적 관점
교실 사회적 규범	개인과 타인의 역할에 대한 신념, 학교에서 하는 수학적 활동의 일반적 본성
사회수학적 규범	수학적 신념과 가치
교실 수학적 관행	수학적 설명과 추론

교실 사회적 규범은 교실에서 교사와 학생의 상호작용적인 패턴 혹은 수학적 활동의 규칙을 의미한다. 일반적으로 교실에서 나타날 수 있은 규범으로 해결 방법을 설명하고 정당화기, 다른 사람의 설명을 잘 듣고 이해하기, 동의나 반대 표시하기, 이해되지 않았을 때 질문하기, 해결 방법 사이 갈등이 있는 때 대안책 찾기, 동료와 협동하기 등(Cobb & Yakel, 1996; Bowers, Cobb & McClain, 1999; McClain & Cobb, 2001; Fukawa-Connelly, 2012)과 같은 것이다.

사회수학적 규범은 “학생들의 수학 활동에 독특한, 전체수업 토론의 규범적 양상”(Cobb & Yackel, 1996, p.178) 또는 보다 포괄적으로 “수학적인 활동과 담화에 관한 기준”(Cobb, 1999, p.9)으로 정의하였다. 학생들이 수학교실 활동에 참여하면서 어떻게 수학에서 지적 자율성을 발달시키는지 설명하는데 있어서 사회수학적 규범을 중요한 개념으로 부각시켰다. 사회수학적 규범은 수학을 학습하면서 교실 공동체가 공유하게 되는 규범으로 학생들이 어떤 것이 수학적으로 다른 풀이인지, 어떤 것이 수학적으로 더 엄밀한 표현인지 등(Cobb & Yakel, 1996; Bowers, Cobb & McClain, 1999; Levenson, Tirosh & Tsamir, 2009; 방정숙, 2004, 2006)과 같은 것에 대해 공동으로 가지게 되는 실천의 한 양상이라 할 수 있다. 따라서 사회 수학적 규범을 탐색하는 것은 그 수학교실에서 나타나는 문화적 특성을 보여준다고 할 수 있다. 이는 수학교실 상황에서 수학적 설명과 정당화에 관련된 규범이기도 하며, 수학 교수학습의 질을 반영해 준다는 점에서도 중요한 역할을 한다.

수학적 관행은 학생들의 추론에 즉각적이고 직접적인 상황을 구성해 주는 것으로 특정한 수학내용과 관련하여 발현되는 것이라 설명한다. 수학적 관행은 학습 경로와 그 활동에 내재된 추론들, 학급의 개별 학생 및 전체 학생들에게 추론의 자원으로 작용하는 것을 말한다(Yackel, Gravemeijer, Sfard, 2011). 예를 들어, 저학년 학생들이 하나씩 수를 세다가 10개를 하나의 묶음으로 두어 세는 전략을 사용한다면, 단위의 개념을 정당화하는 것이 필요하게 된다. 만약 이 교실에서 단위의 개념이 명확해지면, 묶음으로 세는 전략은 더 이상 정당화가 필요 없게 되고 학생들이 단위를 이용한 추론을 할 때 자원으로 활용할 수 있는 수학적 관행이라 할 수 있다.

Paul Cobb은 사회적 관점을 취하면서, 수학을 복합적인 인간의 활동으로 보았으며, 사회적으로 받아들여지는 행동 방식에만 주목하지 않고 공유된 것으로 여겨지는 의미의 발달을 강조하였다. 따라서 국소적인 교실 공동체의 규범과 관행은 교사와 학생의 상호작용의 진행 과정에서 구성되고, 이미 확립된 추론 방식이나 의사소통 방식이 아닌 발현하는 현상으로 보아야 한다고 설명하였다.

한국 수학교실에서 사회수학적 규범에 대한 연구는 2000년 초부터 초등 수학교실을 중심으로 활발하게 진행되었다. 특히, 무엇이 정당한 것인지를 결정함에 있어서 문제에서 의도한 방법이자 수학적으로 타당한 방법으로 해결한 경우를 받아들이는 사회수학적 규범이 발견되었으며, 교실 안에서 지식의 방향을 정하거나 오류를 지적하는 등의 수학적 권위가 교사에 집중되어 있음을 보였다(전평국, 1999; 한정화, 강순자, 정인철, 2005). 또 무엇이 수학적으로 더 쉬운가를 판단하는데 있어서 수학적으로 이해하기 쉬운 것 보다는 계산이 간편하고 수월한 것을 더 수학적으로 쉬운 것으로 받아들이는 규범을 발견하기도 하였다(방정숙, 2004, 2006). 방정숙(2004)은 3명의 초등 교사의 수학수업에서 나타난 사회적 규범과 사회수학적 규범을 비교 분석하였다. 공통적인 사회적 규범으로 전반적인 수업의 흐름은 전시학습 상기 또는 동기유발로 시작하며, 학습 문제를 소개하고 개별 활동이나 모둠별 활동을 한 후, 전체 학급을 대상

으로 토론하고 정리하는 순으로 진행되었으며, 주어진 문제에 여러 가지 해결방법이 있다는 점을 강조한 것으로 나타났다. 또한 이유나 근거를 들어 자신의 해결방법을 설명하도록 하는 규범이 나타났으며, 허용적인 학습 분위기가 형성되어 있음을 확인하였다. 학생이 발표가 있더라도 교사가 부연 설명하거나 교사가 가르치고자 하는 내용을 고려하여 특정 학생의 발표에 주의를 기울이는 규범이 공통적으로 나타남을 확인하였다. 사회수학적 규범면에서 유사하게 나타난 것은 무엇이 수학적으로 다른가와 관련된 규범이 부각되었고, 문제 만들기를 통한 문제해결 규범이 공통적으로 나타남을 확인하였다.

이 연구는 수학교실의 문화를 미시적, 거시적으로 분석하려고 시도하는데, 특히 수학교실을 미시적으로 관찰하기 위해 이 연구에서는 사회수학적 규범에 초점을 맞춘다. 사회수학적 규범은 수학교실에서 독특하게 나타나는 문화적 현상이며, 교과내용과 관계없이 분석가능한 개념이기 때문이다.

다. 교실의 수학적 활동과 학습에 대한 해석틀의 확장

수학교실에서 발현되는 사회수학적 규범의 예로 나타나는 무엇이 수학적으로 다른 해법인지에 대한 이해, 무엇이 수학적으로 받아 들여질만한 수학적 설명인지에 대한 이해, 또는 무엇이 통찰력 있는 수학적 해결방법인지에 대한 이해와 같은 것은 교실 밖에서 수학을 할 때 문화적으로 공유하고 있는 일반적인 특성이 있다고 할 수 있다. Sánchez & García(2014)는 학문적 수준의 수학적 규범과 사회수학적 규범을 구분하였다. 수학적 규범은 수학활동에서 일반적으로 공유하고 있는 기대로 보았으며, 사회수학적 규범을 학교 맥락 안에서 교과목으로서 수학을 고려하는 방법에서 나타나는 것으로 보았다. 즉, 수학적 규범은 학교 밖에서 전문가 수학자를 포함한 수학을 하는 공동체가 공유하고 있는 수학활동의 규범적 측면을 설명하는 것이고, 사회수학적 규범은 각 각의 교실 안에서 교사와 학생의 상호작용을 통해서 발현되는 것으로 이해할 수 있

다.

Brown(2007)은 교실에서 일어나는 사회수학적 규범을 수학자의 학문적 공동체가 하는 실천에 학생들이 참여 하는 것으로 설명하였다. 즉, 학생들은 교실에서 학문 공동체가 하는 실천 즉 수학적 규범에 참여하게 되는데 그 과정에서 점진적으로 성숙한 방식으로의 참여함을 분석하였다. Brown은 수학교실에서 학생들의 참여를 사회적 변환의 과정에 초점을 맞추어 재개념화 할 필요가 있다고 보았다. 즉, 교실에서의 교사와 학생의 상호작용을 그 교실에서만 가지는 규범이라는 관점을 넘어서 사회적이고 문화적인 규범이 고려된 교실의 참여의 개념으로 확장할 필요가 있다고 보았다. 즉, 그동안 교사와 학생들의 상호작용으로 각각의 교실에서 개별적으로 나타나는 문화적 특성으로 이해해 왔던 관점에서 사회수학적 규범은 사회적이고 문화적인 규범이 변환의 과정을 거쳐 교실 안에서 구현되는 것으로 보는 새로운 관점으로 취하고 있다.

수학교사는 문화적으로 이미 공유하고 있는 수학적 규범과 관련된 이해를 구현 할 수 있다고 간주할 수 있다. 이는 Cobb & Yackel(1996)이 제안한 사회적 관점이 교실 공동체 안에서 전체토론 과정에서 교사의 중재로부터 발현되는 것이라는 관점의 보완이 필요함을 암시한다. 즉, 사회적으로 문화화 되어 있는 수학적 규범을 수학교실의 문화를 해석하는데 간과할 수 없음을 보여준다. 즉, 규범이 협상의 과정을 통해서 그 수학교실만이 가지게 되는 미시적 문화의 특성이라고 설명하였지만, 사회가 공유하고 있는 수학하기의 실천적 측면이 구현되는 것과 분리하여 생각하기 어렵다.

앞서 말한 대로 수학적 규범은 교실 밖에서 학문적 수학을 논의하는데 전문가 수학자를 포함한 수학 공동체가 수학활동을 하는데 기대하고 있는 규범적 측면에 대한 것이다. 이것은 교실 안에서 교사가 학생들과 수학적 활동을 하는 때, 학생들에게 선호되는 행동이 무엇인지와 관련된다. Levenson, Tirosh & Tsamir(2009)가 설명한 교사에 의해 지지되는 규범의 양태로 나타날 수도 있을 것이다.

특히 수학적 규범은 수학자들이 성취하고자 하는 특별한 가치가 무엇

인지와도 밀접하게 관련된다. Dawkins & Weber(2016)는 증명하기에 대하여 수학적 가치와 이러한 가치를 유지시키기 위한 수학적 규범에 대해서 논의하였다. 그리고 학생들이 증명을 하는 것을 어려워하는 것은 수학자들이 성취하고자하는 가치를 받아들이고, 그것을 유지하기 위한 규범을 지키기 어렵기 때문으로 분석하였다. Dawkins와 Weber는 전문 수학자들이 성취하고자 하는 가치 네 가지와 그 가치를 유지시키기 위한 수학적 규범을 다음과 같이 설명하였다. 첫째, 수학적 진리는 선험적이라는 가치를 유지시키고자 하는 수학자들은 증명의 정당화는 규정된(stipulated) 정의에 기초해야만 하며 증명의 정당화는 연역적 이어야만 하고, 반증을 인정하지 않다는 규범을 따른다. 둘째, 수학적 지식과 정당화는 시간이나 저자(증명을 기록한 저자)를 포함하는 (비-수학적인)맥락에서 독립적이어야 한다는 가치를 유지하기 위해, 수학적 증명은 저자 또는 독자에 대한 언급이 없이 작성된다. 셋째, 증명은 수학자의 이해를 증진시켜야 한다는 가치를 유지하기 위해 반복적 계산과 자명한 것들은 증명에서 누락될 수 있고, 관련성 없는 문장은 증명에서 표현하지 않으며, 출판된 증명은 그들의 수학적 구조를 나타내기 위해 조판되며, 기호의 선택은 규칙을 따른다. 마지막으로 수학자들은 일관된 규범과 실천을 원한다는 것이다.

교실에서 발현되는 사회수학적 규범이 전문가 수학자가 하는 것과 같을 것이라는 것을 기대하기는 어렵다. 수학자가 가지는 표현 체계나 개념적 도구들과 비교하여 학생들이 활용할 수 있는 자원은 부족하고(Weber, Inglish & Mejia-Romos, 2014), 교실 공동체는 때때로 수학 공동체와는 다른 것을 필요로 하기 때문이다(Staples, Bartlo, & Thanheiser, 2012). 그러나 수학 교육자들의 교육내용은 수학자의 실천의 모습을 통해 정보를 제공받는다. 수학 교육자나 교사가 갖는 의무중 하나는 수학자의 증명 실천을 왜곡시키는 방식으로 학생들에게 증명을 표현하는 것은 피해야 할 필요가 있다는 것이다(Herbst & Balacheff, 2009).

Rasmussen, Wawro & Zandieh(2015)은 위와 비슷한 논의를 바탕으로

Paul Cobb이 제시한 수학교실 문화 분석을 위한 해석적 틀을 확장한 새로운 틀을 제안하였다. 특히, 그들은 수학적 관행을 학문적 관행과 구분하였다.

<표 Ⅱ-2> 확장된 해석적 분석틀 II (Rasmussen et al., 2015, p. 262)

학문적 관행	교실 수학적 관행	수학적 활동에 참여	수학적 설명과 추론
수학의 학문적 관행과 관련하여 교실 공동체의 수학적 과정은 무엇인가?	특정한 교실에서 발현되는 추론의 규범적 방법은 무엇인가?	어떻게 개별 학생이 작은 그룹과 전체 교실 상황에서 발생한 수학적 과정에 기여할 수 있는가?	개별 학생이 수학적 작업에서 떠 올리는 수학적 개념은 무엇인가?

Rasmussen, Wawro & Zandieh(2015)는 특정한 교실에서 나타나는 추론하기의 규범적 방법이 무엇인가에 답하기 위해 그동안 교실 수학적 관행이라는 단일 구인의 한계를 지적하였다. 그러면서 그들은 학생들이 아이디어를 생각하는 특정한 방법에 대한 좀 더 포괄적인 설명을 시도하였다. 그들은 자신의 확장된 틀은 Sfard(1998)의 학습에 대한 “참여적 은유”의 주장과 맥을 같이 한다고 서술하였다.

교실 수학적 관행은 학습자들이 문제를 해결하고, 그들의 생각을 설명하고, 아이디어를 표현할 때 발현되는 추론의 규범적인 방법에 대한 것이고, 학문적 관행은 수학자들이 전문적으로 하는 방법에 관한 것으로 전문수학자들이 하는 활동의 핵심에 있는 정의하기, 알고리즘화하기, 기호화하기, 이론화하기(Rasmussen, Zandieh, King, & Teppo, 2005) 등이 있다. Rasmussen, Wawro & Zandieh(2015)는 교실 수학적 관행은 발현적이고 잠재적으로 특수한 집단의 수학적 진보를 포착하는 것이라면, 학문적 관행은 어떻게 교실의 집단적 진보가 전반적인 학문의 핵심적 관행을 반영하고 구현하는지를 포착하는 것이라 설명한다. 학문적 관행은 Moschkovich(2007)가 언급한 수학자들의 담론적 실천을 포함하는 “전문적 담론 실천(professional discourse practice)”과 비슷하다. 그리고 이것

은 문화적으로 역사적으로 상황화 된 것이며, 학생들은 수학수업을 통해 “사회적이고, 문화적이며, 역사적으로 생산된 실천을 규범적으로 받아 들여야 한다(Moschkovich, p. 25)”고 보았다.

2. 실천공동체관점에서 미시적 교실 문화 이해

사회수학적 규범을 포함한 교실 규범에 대한 연구는 결과적으로 그 교실이 가지고 있는 사회문화적 특성이 무엇인지에 초점이 있었다. 어떤 행위가 어떤 규범을 발생하도록 하는지 그 환경을 설계하는 데에 관심을 두었던 반면, 그 교실 규범이 어떻게 나타나는지 그 구조적 역학에는 관심이 부족하였고, 공동체 구성원으로서 교사의 역할, 구체적으로 교사와 학생이 어떻게 사회수학적 규범을 협상해 나가는지에 대한 논의는 부족했다. 규범이 형성되고 강화되는 과정에서 의미협상의 과정은 그 교실에서 참여하고 있는 교사와 학생이 처한 상황에 영향을 받을 수 있다.

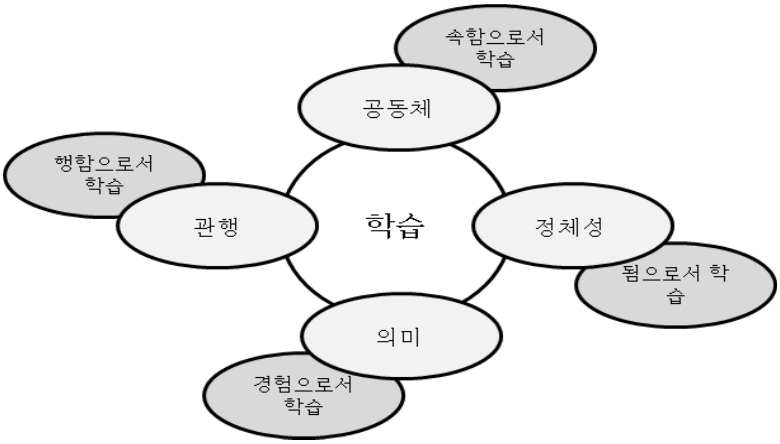
이 연구는 규범의 협상 매커니즘을 실천공동체의 관점에서 이해하고자 한다. 실천 공동체는 공동체가 공유하고 있는 실천에 점진적인 참여를 통해 학습이 일어난다고 보고 있다. 실천 공동체는 자발적이며 지속적인 의미협상을 통해 의미를 형성하고, 그로인해 자신의 실천을 변화시킨다는 관점을 가지고 있기 때문에, 교실에서 발현하는 규범을 이해하고, 그것에 참여하는 학생의 실천을 이해하는데 적합할 것으로 판단하였다. 먼저 실천공동체의 개념을 탐색하고, 그 안에서 수학교실의 미시적 문화를 어떻게 이해할 것인지를 서술한다.

가. 실천공동체로서의 수학교실 공동체

학습의 사회이론은 학습을 명제적 지식의 습득으로 정의하는 기존의 관점과는 달리 상호 참여를 통해 수행되는 실천 방식을 상정하여, 어떠

한 사회적 형태의 참여를 통해 학습이 일어나는지를 탐색한다(Lave & Wenger, 1991; 손민호, 2005). 따라서 공동의 실천 방식을 공유하는 실천 공동체가 학습의 사회이론에서 중요한 위치를 차지하며, 이 관점에서 학습은 공동체의 실천에 참여하면서 그것을 유지시키고 발전시키는 것이 문제가 된다(Wenger, 1998). 학습을 사회적 참여로 해석한다는 것은 일종의 관계가 형성되고 부단히 쇄신되는 양상에 초점을 맞춘다는 것이다(Lave & Wenger, 1991). 이때, 참여는 단순히 누군가가 어떤 활동에 참가한다는 것 이상이며, 그것은 개인이 공동체의 참여자로서 성장하면서 정체성을 구성하는 과정으로 참여를 통해 개인이 무엇을 하는지 모습을 결정하고, 동시에 자신이 누구이며 지금 하고 있는 일을 어떻게 이해하는지를 결정하게 한다.

이때, 지식은 앎이라고 하는 인간의 행동 안에 존재하는 것이며, 명시적인 것일 뿐만 아니라 암묵적인 것이다. 지식은 개인적인 것이자 동시에 사회적인 것이며, 지식은 역동적이라 끊임없이 움직이는 것으로 이해할 수 있다(Wenger, MeDermott, & Synder, 2002). 사회의 참여과정을 하나의 학습과 앎의 과정으로 이해하기 위해서는 우리가 우리의 삶이나 세상을 경험하는데 사용하는 능력으로 “의미”, 구성원들이 공유하는 행위 양식이나 관점인 “실천”, 행위에 대해 가치를 부여해주는 “공동체”, 그리고 그 안에서 우리 “정체성”이라는 요소들이 관여하고 있음을 이해할 필요가 있다(Wenger, 1998).



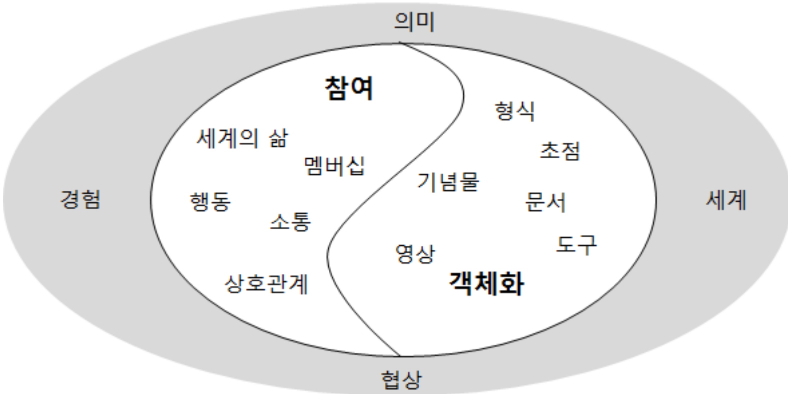
[그림 Ⅱ-1] 학습의 사회이론의 요소 (Wenger, 1998, p. 23)

사회적 형태의 참여를 통해 학습한 학습은 공동의 실천 방식을 공유하는 실천공동체 안에서 일어난다. 실천공동체는 “동일한 관심사와 일련의 문제, 어떤 주제에 대한 열정을 공유하고 있으면서, 지속적으로 상호작용하는 과정을 통해 이 분야에 대한 지식과 전문성을 보다 깊이 있는 것으로 만들어가는 사람들의 집단(Wenger, MeDermott, & Synder, 2002, p.19)”이다. 다시 말해, 학습은 실천공동체의 점진적으로 참여하면서 일종의 관계가 형성되고 합법적 주변 참여자로부터 중심 참여자로의 관계의 변화 과정이라고 이해할 수도 있다.

여기서 합법적 주변 참여의 개념은 그 자체로 교육의 제도적 형태나 교육적 전략을 뜻하는 것은 아니다. 합법적 주변 참여는 실천 공동체 내에서 중심적으로 실천을 공유하고 상호작용하는 구성원의 실천에 주변적으로 참여하다가 점진적으로 실천의 중심으로(또는 전문가로) 근접해 갈 수 있음을 설명한다. 이는 도제식 교육에서 학습의 기회를 설명할 때 사용되었다. 합법적 주변 참여의 기간 동안 학습자는 실천의 문화를 자기의 것으로 만드는 기회를 부여받게 되고, 주변적인 시각에서 무엇이 그 실천 공동체를 구축하고 있는지에 대한 감각을 점차적으로 키워나간다.

실천공동체에서 실천의 개념은 우리가 하고 있는 활동에 의미와 구조를 부여해 주는 것이다. 이것은 구성원들 사이에 오랫동안 공유해 온 행

위 양식 혹은 이해틀이나 관점이라 할 수 있다. 공동체 구성원은 특정한 형태의 실천을 공유하고 있는 공동체에 참여하면서 그 안에서 각자 자신의 경험에 대해 의미를 부여하게 되며, 의미를 주고받으며 상호 작용한다.



[그림 Ⅱ-2] 참여와 객체화의 이중성 (Wenger, 1998, p. 105)

Wenger(1998)는 개인이 공동체 내에서 경험에 대한 의미를 생성하는 과정은 참여와 객체화가 끊임없이 작용하면서 발생한다고 보았다. 이때, 객체화는 추상적인 것을 마치 실체가 있는 것처럼 대한다는 것을 뜻하고, 공동체에서 경험하는 것에 형태를 부여하는 과정을 의미한다. 공동체에서의 의미는 공동체는 참여와 객체화라는 상보적 과정 속에 생성된다고 보았다. 객체를 만들어 냄으로써 경험에 대해 형태를 부여하게 되고, 그 형태 때문에 자신이 무엇을 경험하는지를 결정하게 되기 때문이다. 예를 들어, 참여와 객체화는 세기(counting)활동과 자연수 개념으로 설명할 수 있다[8]. 개인은 공동체에서 공유하고 있는 방식의 세기활동을 하는데, 이 활동은 자연수라는 개념으로 압축되어 객체화된 형태로 나타난다고 할 수 있다. 자연수는 이런 공동체가 공유하는 세기의 활동이 객체화

8) 수세기와 자연수와의 관계를 구성주의에서 이야기 하는 반영적 추상화와 연결할 수 있을 것이다. 이 현상은 구성주의와 학습의 사회이론에서 동시에 포착하고 있다고 할 수 있다. 그러나 구성주의와 학습의 사회이론에서 취하고 있는 인식론적 차이를 상기 할 필요가 있다.

된 하나의 형식이다. 그러나 세는 활동은 자연수와 상보적인 특성 때문에 그것이 조합되어야 공동체 안에서 의미를 지니게 된다는 것이다. 세기활동을 설명하기 위해서는 자연수가 필요하고, 자연수는 공동체가 공유하는 세는 방법 및 활동이 없이는 또 설명할 수 없기 때문이다.

이 연구에서는 교실공동체를 실천공동체로 해석하고자 한다. 하지만 학교 수업을 실천 공동체의 합법적 주변 참여로 이해에는 몇 가지 문제가 있음을 시인한다. 먼저, 교실환경에서 학습의 의도성 및 재맥락화 문제이다. 실천공동체에서 예로 드는 도제학습과 학교의 수업에는 큰 차이가 있다(Lerman, 1998). 교실에서의 학생은 학습에 비자발적 일 수 있으며 그것은 견습생의 학습과는 매우 다른 상황을 만들어 낼 수 있다. 둘째, 교사는 수학을 가르치려는 의도가 있다. 수학 학습은 교실의 목표이며, 교수는 교사의 직무이다. 그러나 견습상황에서 학습은 목표 자체가 아니다. 마지막으로 참여에 대한 주변부에서 중심부로의 이동에 대한 의문이 제기된다. 교실의 학생들이 반드시 수학자 또는 수학 교사가 되는 것을 목표로 삼지 않기 때문이다. 따라서 학교 교육의 목표를 이해하는데 있어서, Lave와 Wenger의 실천 공동체에 주변부에서 완전히 참여로의 점진적 변화는 문제가 있다고 보았다(Adler, 1998; Lerman, 1998).

합법적 주변 참여 이론이 수학의 교실 교육 및 학습으로 바로 변환되지는 못하지만, 사회적 관행으로서의 학습 관점은 학습에 강력한 영향을 미친다. 실천공동체를 통해 수학교실의 학습의 모습을 다 설명하기는 어렵다. 하지만 교실 안에서 상호작용을 통해 만들어가는 규범의 학습은 실천 공동체 개념으로 접근 가능하다. 교실 규범의 입장에서 보면, 교사와 형성되어 있는 규범에 중심적인 참여를 하고 있는 학생들이 있을 수 있고, 우리는 학생들이 그러한 실천을 점진적으로 수행할 수 있게 되기를 기대한다. 즉, 학생들이 학습하여 전문 수학자가 되기를 기대하는 것도 아니고, 교사가 되기를 기대하는 것이 아니라 교사를 중심으로 교실공동체가 공유하기를 기대하는 수학활동의 실천을 익히는 것에 초점을 둔다면, 수학교실을 실천 공동체로 이해할 수 있다.

수학교육 연구에서도 수학교실을 실천공동체의 관점에서 분석한 연구

들이 있다. Brown(2007)은 수학교실을 실천 공동체 관점에서 해석하며, 한 학생의 수업 참여방식을 조사하여 점진적으로 성숙한 방식으로의 참여과정을 분서하였다. 권점례(2007)는 실천공동체 관점에서 한국의 수학교실의 관행을 분석하였다. 수학과 수학교수에 대한 정체성이 수학교실의 사회적 관행과 학생들의 수학 및 수학 학습에 대한 정체성에 미치는 영향을 연구 하였다. 그 연구에서는 교사의 정체성이 교수 관행에 반영되어 학생의 학습 관행에 영향을 미치고, 그것이 학생의 정체성을 형성하며, 그 역의 관계도 나타남을 확인하였다. 이로써 교사와 학생의 관행에 대한 상보적인 성격을 밝혔다. Dawkins & Weber(2016)는 수학적 가치나 이러한 가치를 유지하는 규범의 관점을 설명하기 위해, 증명과 관련된 수학적 관행에 학생들이 견습생으로 참여한다는 관점을 가지고 있다. 즉, 증명하기라는 실천에 대한 합법적 주변 참여를 수학 교실의 학습으로 간주하였다. 이 연구에서는 학생들이 가치를 받아들이는 것이 증명하기라는 실천을 배우는 데, 필수적이라고 주장한다. 이러한 가치를 받아들이고 인지하지 못하는 학생들은 그러한 가치를 유지하기 위한 규범을 지키는 것이 어렵기 때문에 증명을 하는 것이 혼란스럽고 어려워함을 밝혔다.

나. 실천공동체 안에서 규범의 의미협상 과정 이해

이제 미시적 수학교실 문화의 분석틀을 실천공동체를 통해 이해해 보고자 한다. 확장된 수학교실 문화 분석틀에서 사회적 관점으로 제시하고 있는 교실 사회적 규범, 사회수학적 규범, 수학적 규범, 학문적 관행, 수학적 관행은 교실이라는 실천공동체가 공유하는 실천의 양상으로 해석할 수 있다. 이때, 학생들이 규범과 관행을 지키는 것은 특정한 실천에 참여하는 것이다. 사회적 참여로서 학습의 현상을 설명하는 Lave와 Wenger의 관점에서 교실의 규범과 관행의 실천을 재해석하면, 교실 규범의 이해를 학습으로 설명할 수 있는 가능성을 연다. 즉, 교실에서 사회적 규범

및 사회수학적 규범을 실천하고 있는 교사와 학생들이 있고, 합법적으로 주변적 참여를 하는 학생들이 점진적으로 이러한 규범을 실천해 가는 것을 실천공동체 안에서의 학습으로 해석하는 것이다.

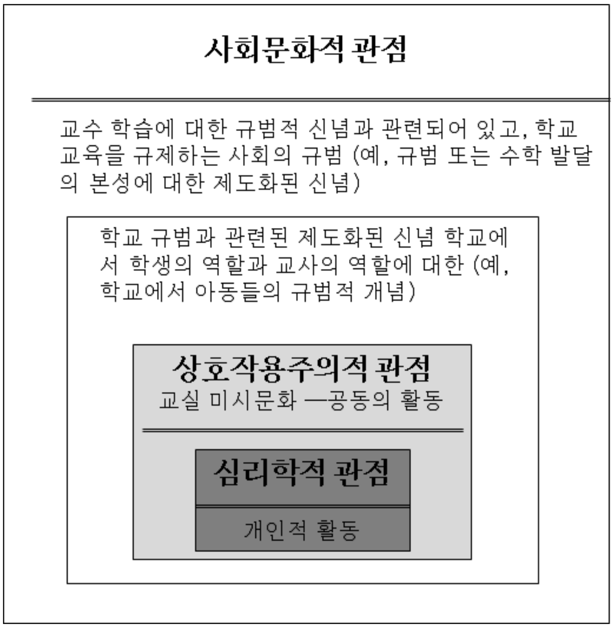
앞서 사회수학적 규범을 준수하고 관련된 실천에 참여하는 것을 실천공동체에서의 학습의 과정으로 이해할 것임을 밝혔다. 이제, 사회수학적 규범과 관련된 규범적 의미를 협상하는 과정을 Wenger의 실천 공동체의 참여와 객체화의 관점에서 이해해 보자.

여기서 사회수학적 규범은 공동체가 공유한 실천으로 교사와 학생들이 자신의 경험을 해석하여 만들어 낸 의미라 할 수 있다. 즉, 사회수학적 규범은 참여와 객체화를 통한 의미협상과정으로 나타나는 것이다. 예를 들어, 두 풀이가 수학적으로 서로 다른 풀이인지를 판단하는 경험을 하는 과정에서 학생들은 풀이를 위해 사용한 정리가 무엇인지 그 정리의 근원적 아이디어가 무엇인지에 초점을 맞추는 상황을 생각해 보자. 수학적으로 다른 풀이란 무엇인지에 대한 의미를 생성하는 과정에서, 수업의 참여는 사용한 정리가 무엇인지 그 정리의 근원적 아이디어를 명시화하여 판단의 근거를 제공하는 형태를 만드는데 그것이 바로 교실의 사회수학적 규범을 형성하는데 관여하는 객체라 할 수 있다.

3. 수학교실 문화를 이해하기 위한 거시적 관점

교실이란 공간에서 교사와 학생들은 언어적, 비언어적 상호작용을 통해 수업이 발생한다는 관점으로 수학교실이 연구되었다. 이러한 상호작용은 시간이 지남에 따라 명확한 행동 패턴이 발현하고, 수학 교육을 이해하려면 이러한 의사소통의 상호작용에서 나오는 패턴을 이해하는 것이 중요하다고 보았다. Cobb과 동료의 연구는 문화적 표현에 대한 상호작용 관점을 대표한다고 할 수 있다. 그들은 개인적 및 상호작용적 표상에 초점을 맞추는 것은 수학 교육의 환원 불가능한 사회성을 놓치기 쉽다는 점을 인식하였다. 그리고 더 넓은 교수 맥락을 고려하여, 해석적인 틀을

학교와 사회수준으로 정교화 된 버전을 제안하였다.



[그림 Ⅱ-3] 해석적 분석틀의 정교화 (Cobb & Yackel, 1996, p. 181)

교실의 활동을 통해 일어나는 수학학습의 사회적 관점과 심리적 관점과 반사적인 관계아래, 교실의 미시 문화 활동을 구성하고, 이는 상호작용의 관점에서 통합되었다. 이것은 교사와 학생의 역할에 대한 규범과 교수 신념에 상호영향을 주며, 더 넓은 사회문화적 관점과 통합된다고 보았다.

이 절에서는 교실문화와 관련하여 학교 밖의 더 넓은 사회문화적 관점과 통합한 연구를 살펴보고, 수학교실을 분석하기 위한 거시적인 분석의 관점을 모색한다.

Young(1970)은 교육과정에 대한 해석적 관점을 취한 연구자이다. 교육내용은 교육제도 속에서 선정되고 처리되기 때문에 교육과정에서는 암묵적으로 무엇을 지식으로 간주하는지, 어떻게 지식에 접근해야 하는지, 지식의 영역은 어떻게 분리되는지가 내포되어 있다고 보았다. 따라서 특정

한 문화와 사회에서는 특정한 지식만이 가치 있는 지식으로 간주된다. 그리고 지배 집단의 가치와 특권을 정당화하거나 손상시키지 않는 범위 내에서만 교육 내용이 유지된다고 보았다.

Miyakawa(2017)은 일본과 프랑스의 수학 교과서와 교육과정 문서를 바탕으로 평면기하에서 가르쳐지는 증명의 본성을 비교한 결과, 일본에서는 준 공리화 된 기하학이 선택되고, 증명은 기하학 시스템을 공리화하기 위한 수단으로 사용됨을 확인하였다. 입증해야 할 명제는 원칙적으로 시스템 구축에 기여하는 명제이고, 그렇기 때문에 일반적인 대상에 대한 명제일 때 그것을 증명이라 칭하고, 특정한 대상에 대한 정당화는 증명으로 불리지 않는 것을 밝혔다. 반면, 프랑스에서는 지각 기하학(perceptive geometry)에서 이론 기하학으로의 전환하는 모습을 보여주며 즉, 그리기(drawing)에서 작도로 가는 것을 목적으로 한다고 보았다. 프랑스에서 평면기하는 공리적인 기하학을 목표로 하지 않으며, 증명할 명제는 일반적인 대상에 관한 것에 국한하지 않았다. 증명에 사용할 수 있는 성질은 증명이 도입되기 전에 학습한 것을 포함했다. 고대 그리스 기하학은 세 가지 원칙, 즉 기하학적 객체의 이론적 또는 이상적 본성, 일반적 명제, 그리고 공리 체계를 가지고 있는데, 이 관점에서 보면 프랑스 기하학은 첫 번째 측면을 중요시하며 두 번째 및 세 번째는 일본 기하학을 중시한다고 분석하였다.

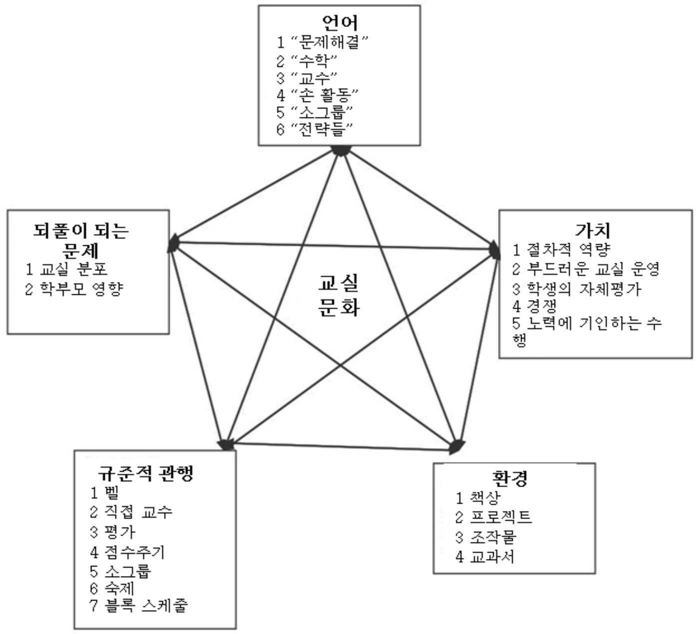
Bernstein(1975)는 학교 안에서 일어난 상호작용을 권력 및 통제의 구조와 관련시켜 해석하였다. 특히, 교육과정, 교수법, 평가에 대하여 주목하였다. 이 세 가지 전달체계는 교육적 지식의 문제와 직결되어 있음을 보였다. 즉, 교육과정은 무엇이 타당한 지식인지를 규정하고, 교수법은 무엇이 지식의 타당한 전달방법인지를 규정하며, 평가는 지식의 타당한 실현이 무엇인지를 규정한다는 것이다. 따라서 학교나 교실에서의 지식은 사회문화적인 통제아래 규정된다는 것이다.

Bishop(1988)은 사회문화적 관점으로의 수학교실 문화를 접근 하였다. 그는 수학교육의 사회적 측면은 문화적, 사회적, 제도적, 교육적, 개별적 측면으로 구성된다고 설명하였다. 앞서 논의된 교육과정 및 교과서 그리

고 평가와 교수법과 관련된 논의는 사회적, 제도적, 교육적 관점에서 논의된 것으로 해석할 수 있다. 개별적 측면에서 논의는 Forman & Ansell(2001)의 연구에서 찾아볼 수 있다. 그들은 교사 한명이 가지는 교실이나 부모의 가치에 대한 교사의 믿음을 포함하여, 제도적 맥락과 함께 교사의 역사를 분석하였다. 교사가 학생이었을 때 있었던 개인적인 일의 과거, 현재 미래를 포함하여 분석하였다.

수학을 학습하는 것은 수학의 도구적 가치로 인해 사회 제도로서 존속하며, '수학은 어떤 외부 목적을 추구하는 데 사용될 사실, 규칙 및 기술의 축적이다(Ernest, 1989)'라는 공통된 믿음에 의해 지속 된다. 그 예로, 바빌로니아 학생들은 회계 절차를 배웠고, 고대 이집트 학생들은 측량 절차를 배웠고 초기 중국학자들은 날짜 계산 방법을 학습했다. 따라서 수학을 학습하는 것은 문화의 여러 측면들 사이의 상호 관련성 안에 놓여있다. 수학학습에서 개인의 행동을 이해하기위해 심리적인 관점이 많은 설명을 제공했지만, 심리적인 이유만으로는 그것을 이해하기에는 부족하며 학교 교육과 수학 교육의 전통이 문화적이며 사회 활동에서 나오고 사회적 목표를 향해 나아감을 이해할 필요가 있다.

Gill & Boote(2012)는 미국에서 지속적으로 수학교육을 개정하려는 노력에도 불구하고 여전히 절차적 지식을 전달하는 수준의 수업이 유지되는 이유를 문화적인 근거로 설명하였다. 그는 유능한 수학교사의 수업을 관찰하여, 그 교실의 문화를 언어 사용, 표준화된 관행, 도구 및 장비 사용, 지속적인 관심사 및 가치, 반복되는 문제의 측면에서 분석하였다.



[그림 Ⅱ-4] 문화의 다섯 가지 측면사이의 관계 모델(Gill & Boote, 2012, p. 20)

위 그림은 Gill & Boote(2012)의 연구에서 분석한 사례를 표현한 것이다. 그들은 문화권 내에서 발생하는 반복적인 문제는 가치, 표준 행동 및 언어 사용에 대한 통찰력을 제공한다고 보았다.

McCloskey(2014)는 미국 수학교육 관행의 의식적인(ritual) 측면을 조사하였다. 그는 학생들을 서열화 하기 위해 점수를 매기는 것, 학생으로서 교수(교육 실습)에 참여하면서 수학교실에 이미 누적된 관행을 답습하는 것을 미국의 수학교육 관행의 상징으로 들었다. 수학교실의 관행의 상징으로는 때를 맞춰서 치루는 시험, 보드 레이스(칠판 앞에서 계산을 수행하기 위해 서로 경쟁하는 보드 레이스) 등을 들었다.

특히, McCloskey(2014)는 Cobb과 Yackel이 설명해온 발현적 관점을 보완할 필요가 있음을 인식하고 있었으며, 문화의 집단적 관점에 대한 의식과 시간과 통찰에 대한 관점이 보완될 필요가 있다고 보았다. 그는 발현적 관점의 기저에 있는 문화의 상호작용적 관점과 자신이 취하고 있

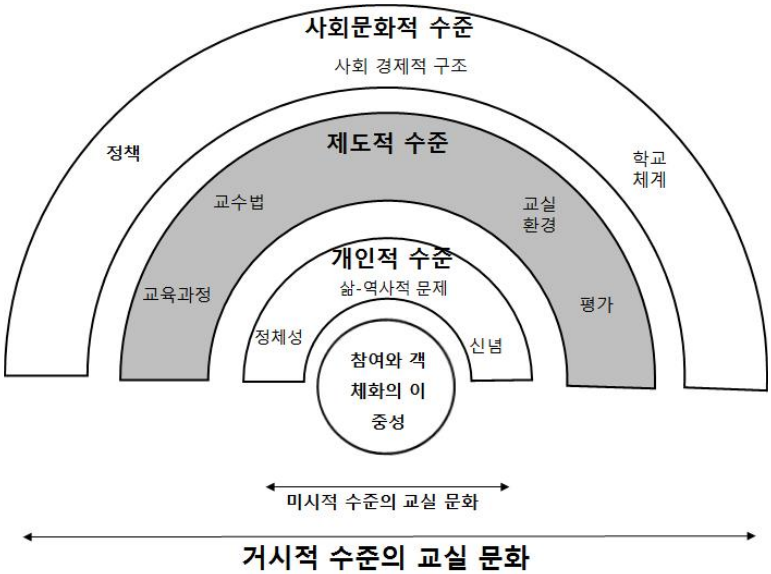
는 문화의 집합적 관점의 차이를 예를 들어 설명하였다. 발현적 관점에서는 학생들이 수학 활동을 하면서 무엇을 학습할 수 있는지에 관심을 둔 것이라면, 의식(ritual)의 문제에서는 왜 분수를 가르칠 때, 일반적으로 사용하는 모델이 원인가에 대한 답을 하는 것이라고 하였다.

수학교실에서의 참여와 관련하여 가정의 문화적 배경을 바탕으로 해석한 연구도 있었다. Mogari(2017)은 가부장적인 공동체에 속한 여학생들이 가정에서 경험이 학교 수학교실에서 성 지향적인 고정관념으로 작용하는 것을 문제의식으로, 문화적으로 적절한 지도에 관한 연구를 진행하기도 하였다.

위의 논의들은 수학교실의 문화를 이해하기 위해서 고려해서 제도적인 수준과 사회문화적 수준 뿐 아니라 개인적인 수준의 논의 역시 교실 안에서 개인의 행동을 이해하는 근거가 됨을 보여준다.

4. 수학 교실 문화 분석틀

앞서 논의한 바와 같이 수학 수업을 이해하기 위해, 미시적인 교실과 더불어 사회적, 문화적, 제도적, 교육과정, 생애사적, 물리적 환경과 상호작용한다. 거시적인 관점으로만 수학교실을 분석하면, 교실의 개별적인 특성을 해석하지 못하고 미시적인 관점으로만 교실 수업을 분석하면, 교사와 학생들의 상호작용이 거시적인 사회문화적 맥락들과 다소 유리된 것으로 보일 수도 있다. 따라서 이 연구는 미시적 혹은 거시적이라는 이분법적인 구분을 넘어서 수학교실에 서로 상호작용하는 다층적인 맥락들을 고려한다. 수학교실의 문화를 이해하기 위한 개념적 틀을 도식화 하면 다음과 같다.



[그림 Ⅱ-5] 수학 교실문화를 이해를 위한 개념적 틀

수학교실에서 미시적으로 발현되는 수학교실의 문화는 실천공동체의 관점에서 참여와 객체화의 상보적인 관계를 중심으로 해석하며 학교 밖의 거시적인 차원은 실제 분석 자료로서 수집 가능한 제도적 수준에서의 분석을 시도한다. 즉, 각 나라의 문화서화 된 교육과정, 검인정 교과서, 평가체계 및 평가 문화의 특성 등과 과 관련하여 각 교실에서 나타난 미시적인 교실 문화인 사회수학적 규범과의 관련성을 찾고자 한다.

III. 한국과 싱가포르 수학 교실에 대한 이해

이 장에서는 수학교실의 문화적 현상을 거시적인 관점에서 해석하기 위해, 싱가포르의 사회문화적 차원, 제도적 차원, 개인적 차원에서 다루어진 선행연구를 정리한다.

1. 싱가포르의 수학교실에 대한 이해

가. 싱가포르 교육의 특징

싱가포르는 부존자원이 전혀 없으며, 1965년 말레이시아로부터 분리 독립한지 갓 50년이 넘은 다민족으로 이루어진 작은 도시국가이다. 싱가포르는 국토 면적이 서울보다 조금 크고, 인구는 500만이 조금 넘는다. 이 작은 나라가 세계 국가 경쟁력과 국민소득에서 단기간에 선진국 수준으로 발전할 수 있게 된 원인 중의 하나는 교육을 통한 인재 양성과 그들의 교육의식에 있다.

이윤미(2012)는 동아시아 각국에 나타나는 교육 모형의 유사성과 차이점을 분석하면서, 싱가포르 사회의 특징을 다음과 같이 정리하였다. 첫째, 싱가포르는 권위주의를 수용하는 사회이다. 비민주적일 수 있는 정책들이라 해도 국가 번영을 위해 불가피하다는 인식이 공유되는 경향이 있다는 것이다(Chen, 2011). 둘째, 정부가 만든 사회(Goverment-made society)로 분석하였다(Mok, 2003). 사회 문화와 정치개혁 등이 정부의 주도로 이루어 졌음을 설명하였다. 셋째, 권력거리(Power distance)가 높은 사회라는 평가를 받아왔다(Valentine & Speece, 2002). 개인이 사회에 기여하는 정도가 불평등 한데, 그것을 당연시 받아들이는 경향이 있다고 보았다.

홍득표(1997)는 싱가포르 교육제도에 대해 능력주의, 경쟁주의, 기술교육 강화, 국제수준 유지, 특정집단에 대한 특권배제를 그 특징으로 보았다. 그는 싱가포르의 이러한 능력주의는 싱가포르를 철저하게 능력위주의 경쟁사회를 만들었고, 영국의 엘리트 교육을 모델로하여 우수한 인재만이 경쟁에서 생존할 수 있는 적자생존의 원리를 실행하고 있으며, 예외 없이 이 원칙을 적용하기 때문에 사회규범으로 자리잡게 되었다고 논하였다.

또한 양승윤(2003)은 싱가포르 교육제도에 대해, 학생의 능력과 적성을 단계별로 판별하여 학생의 진로를 안내하는 능력주의, 둘째, 싱가포르 통상 산업부가 장기적인인 로드맵 속에 국가의 인력수급 전망을 교육부에 보내면, 교육부는 장기적인 인적 자원계발 계획을 교육과정에 반영하여 정책을 실행하도록 하는 교육의 도구적 기능을 강조, 셋째, 초등학교 3학년부터 영재 판별을 시행하여 국가에 중추적 역할을 할 인재를 양성하고, 이들에게 리더십을 교육하는 엘리트 교육을 중시하고 있다는 점을 대표적인 특징으로 들었다.

시대에 따른 싱가포르 교육의 특징을 살펴보면 다음과 같다. 1978년도 싱가포르는 교육적 낭비를 절감하기위해 능력별 학급 편성, 교과 과정 변화와 학교 경영등과 같은 교육정책의 변화를 시도하였다. 이러한 정책 변화의 목표는 학생들에게 자신의 잠재능력을 최대한 발휘할 수 있는 교육을 제공하고자 하는 것이었으며, 넓은 부류의 학생들의 학습에 대한 욕구에 보다 유연하게 반응하기 위함 이었다.

싱가포르의 학제는 초등교육 6년 중등교육 4-5년 이후 2년의 일반대학 준비과정 및 초급 대학과정이 설정되어 있다. 1960년대부터 6년의 초등 교육과정 이후 계열화하여 20%만 엘리트교육을 통해 정치, 경제 지도자로 육성하고 나머지는 전문직업계열로 보내는 교육을 실시해 오고 있다. 이처럼 싱가포르 교육은 매우 엄격하고 위계적으로 운영되고 있다. 능력주의, 평등주의(사회통합), 경쟁을 조화시킨 매우 독특한 사례로 평가되기도 한다(Darling-Hammond, 2010). 국가 정책적으로 다양한 구성원간의 기회균등을 보장하기 위해 공정하게 계층화된 사회를 지향해 왔다.

엘리트들을 '공정하게' 가려내기 위해 학업성취결과에 따라 초등학교단계부터 엄격하게 조기 선발을 실시해왔다 이렇게 가려진 엘리트들에 대해서는 차등적 재정지원 뿐 아니라 각종 혜택이 주어진다(Moore, 2000).

1980년대부터 교육을 혁신하고 학교가 학생과 학부모의 필요에 적극적으로 부응할 수 있는 교육체제를 구축하기 위해서 교육행정의 분권과 자율화를 진행하였다(김왕준, 2010). 싱가포르 교육부(MOE)는 학교 교장들에게 각 학교에서 교수와 학습이 어떤 형태로 이루어질 것인지에 관한 결정에 관해 자율권을 주었다. 분권과 자율화의 노력으로 독립학교(independent schools), 자율학교(autonomous school), 교육 클러스터(지역교육청과 유사한 개념) 등의 정책이 입안되었다(Mok & Tan, 2004). 2017년 현재 163개 중등학교에서 16개의 독립학교와 26개의 자율학교가 지정되어 있다[9]. 이 연구에 참여한 리드교사의 학교도은 자율학교중 하나이다. 자율학교로 지정받기 위해서는 뛰어난 학업 성취, 전인교육프로그램, 지역공동체와 긴밀한 협조관계 구축 등이 선행되어야 한다. 자율학교는 학교프로그램들의 유연한 실 뿐 아니라 학생들의 능력을 확대 시킬 수 있는 광범위한 프로그램 개발을 위해 추가 재정을 지원받기도 한다.

교육클러스터는 중간 단위의 행정기구로 싱가포르 교육부로부터 학교의 직접 관리를 피하기 위해서 만들어 졌다. 이 기구에 소정의 자율권을 부여하는 정책적으로 분권화 정책을 시도하였다. 각 클러스터에는 교육감이 있으며, 교육부는 이들 클러스터로 교사 재교육 프로그램 및 교육기자재 구입을 위한 예산을 배분한다. 또한 교육감은 소속 교장들과 함께 자원의 배분 및 주요 문제에 대한 대처 방안 등을 협의한다.

1990년대 이후 '생각하는 학교, 학습하는 나라(Thinking schools, learning nation, 이하 TSLN)' 이라는 슬로건을 개혁의 이정표로 삼아 '창의적이고 비판적인 교육'을 지향하고 있다. 이러한 개혁은 큰 틀에서는 신자유주의 국제화를 수용하는 것으로, 학교단위자율성을 강화하는 방향으로 개혁하면서 동시에 학업성취도평가를 통한 강한 책무성 점검을 하고 있다(Mok, 2003). NAEP(National Assessment of Educational

9) https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_secondary_schools_in_Singapore

Progress)에 의하면, 싱가포르의 괄목한 성과는 엄격한 교육과정, 훈련된 교원, 학생의 학교생활에 깊은 관심을 가지고 적극 동참하는 부모 등 세 가지 요인들이 있음을 지적하였다(Lee, 2001).

<표 Ⅲ-1> 싱가포르 교육의 기대되는 결과(MOE, 2008)

교육 결과의 핵심 단계		
초등교육의 교육결과	중등교육의 교육 결과	후기 중등교육의 교육결과
옳은 것과 그른 것의 구분함	도덕적 진실성을 가짐	옳은 것을 유지하기 위해 도덕적 용기를 가짐
자신의 장점과 성장 영역을 앎	자신의 능력을 믿고 변화에 적응할 수 있음	역경에 직면했을 때 극복 할 수 있음
협력(cooperate)하고 다른 사람들을 돌볼 수 있음.	팀으로 일을 할 수 있고, 타인을 공감을 할 수 있음.	문화를 넘어서 협업(collaborate)할 수 있고 사회적으로 책임감을 가짐.
사물에 대한 활발한 호기심을 가짐	창의적이며, 탐구심을 가짐	혁신적이고 진취적임
생각할 수 있고, 자신감 있게 자신을 표현할 수 있음	다양한 관점을 인정하고 효율적으로 의사소통 할 수 있음	비판적으로 사고할 수 있고 설득력 있게 의사소통 할 수 있음
자신의 작업에 자부심을 가짐	자신의 학습에 대해 책임을 짐	수월성을 추구하기 위한 목적의식을 가짐.
건강한 습관을 가지고 예술에 관심을 가짐	체육 활동을 즐기고 예술을 감상함.	건강한 삶의 방식을 추구하고 미학을 음미 함.
싱가포르를 알고 사랑함	싱가포르에 대해 믿음을 가지고 국가의 문제를 이해함	싱가포르인이라는 것에 자부심을 가지고 세계와의 관계 속에 국가를 이해 함

또한 싱가포르는 능력 주도 교육(Ability driven education, 이하 ADE)으로 학생들의 잠재 능력의 극대화라는 목적을 두었다. ADE는 교육에의 대중적 맞춤형 접근 시도를 통해서 학생의 능력과 재능을 최대한 개발해 주는 것을 추구한다. 이와 같은 패러다임 아래, 단지 지식과 그 내용의

전달보다는 인성 발달, 자기 동기화의 생성, 자기 능력 확인, 이해력 발달을 강조하는 교육에 초점을 맞추고 있다(MOE, 2000).

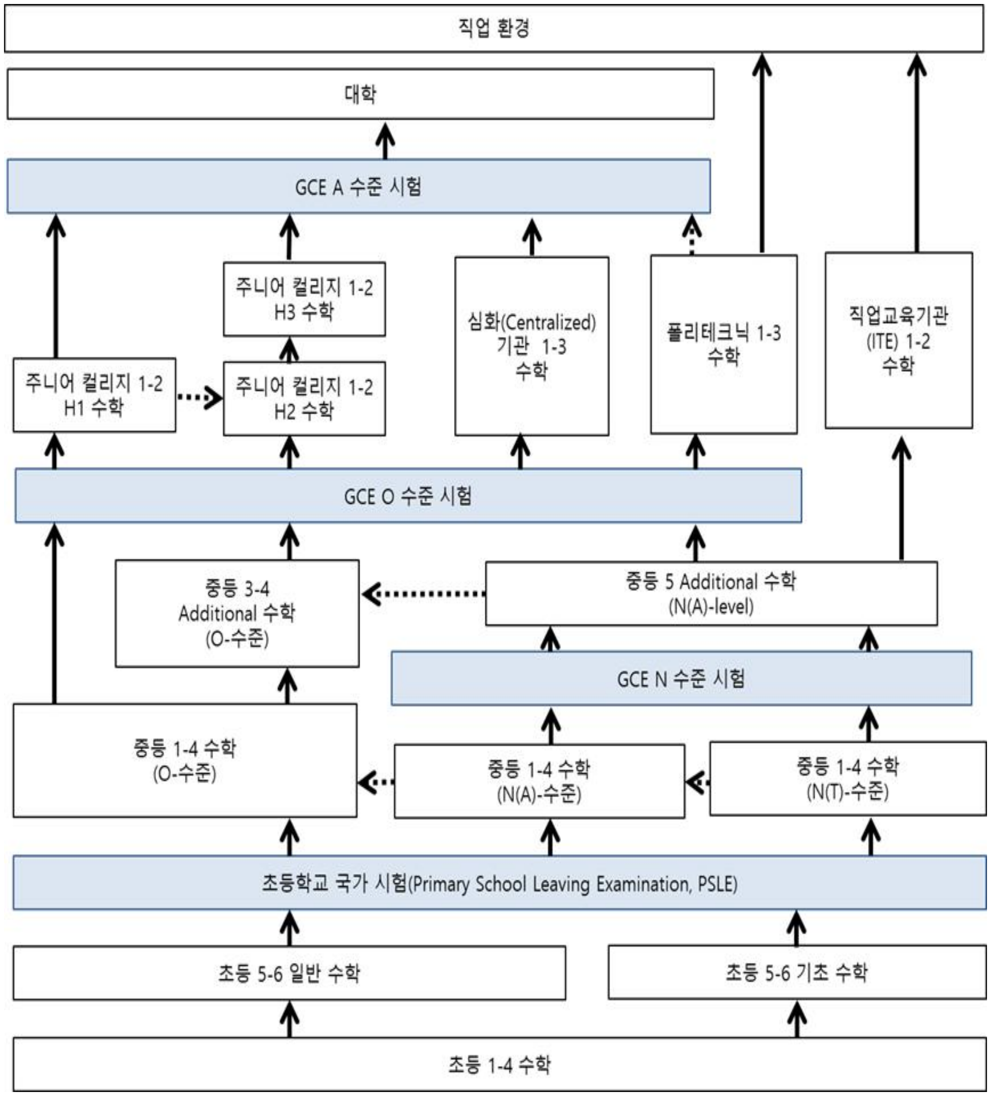
최근 2008년 싱가포르 교육부는 "교육의 기대되는 결과(The Desired Outcomes of Education, DOE)"라는 새로운 교육비전을 제시하고, 교육을 통해 개인적 목적과 사회적 목적 양자 모두를 성취해야 한다는 점을 분명하게 밝히고 있다. 이를 위해서 교육은 두 가지를 수행하는데, 첫째, 교육은 전인적 인간을 육성하는 것으로 이는 전통적인 아시아적 교육 개념으로 교육을 통해 아동을 도덕적, 지적, 신체적, 사회적, 심미적으로 발달시키는 것을 말하며, 둘째, 교육받은 사람은 자신 가족 친구에게 책임 있는 사람인 동시에 공동체와 국가에 대해서도 책임 있는 사람이 되어야 하는 것을 의미한다(MOE, 2009).

나. 싱가포르의 교육 체계와 교육과정

싱가포르의 교육제도는 영국식 교육제도에 근간을 두면서 일부 독일식 교육제도가 가미되어 있다. 싱가포르의 교육은 영국식 엘리트 교육을 표방하며, 철저한 '능력에 따른 차등주의' 철학을 기저로 학제는 영국식을 따른다. 그러나 학생에 대한 엄격한 교육이나 개인의 능력에 따른 철저한 분반제도, 중등과정 기술학교 운영 등은 독일과 흡사하다. 모든 학생들이 각자 개성 있는 적성과 관심 분야를 갖고 있다는 전제에서 출발하며, 학생들이 자신의 잠재 능력을 최대한 개발할 수 있도록 탄력적으로 교육 문제를 다룬다.

이러한 정신은 수학교육에도 적용되며, 싱가포르에서 수학교육의 목적은 각 학교 수준에 따라 조금씩 차이를 둔다. 싱가포르는 수준에 따라 수학과 교육과정이 개발되어 있고, 그 세부목적을 달리하고 있다.

싱가포르에서는 초등학교 졸업시험과 중학교 졸업시험 등 각종 자격시험에서 좋은 성적을 받은 소수의 학생들에게만 좋은 대학에 들어갈 수 있는 구조를 가지고 있다. 싱가포르는 초등학교 6년, 중학교 4-5년, 고등학교 2(3)년 과정으로 학제를 운영하고 있다. 초등학교 4학년 까지는 기



[그림 Ⅲ-1] 싱가포르의 교육체계와 국가시험

초단계라 할 수 있고, 그 후 능력에 따라 두 수준으로 나누어 5~6학년의 탐색단계 학습이 진행된다. 초등학교 후 성취 수준에 따라 O-level, N(A)-level, N(T)-level 로 분리되어 교육을 받게 된다.[10] N(A)-level와 N(T)-level 교육과정은 O-level 교육과정의 부분에 해당하고,

10) 이때, O, N, A, T는 각각 Oridinary, Normal, Academic, Technic을 표시한 것이다.

N(A)-level의 학생들 중 우수한 학생은 5년 과정으로 O-level을 밟을 수 있다.[11] O-level을 이수한 학생들은 GCE O(General Certificate of Education Ordinary)수준의 시험을 치르고, 중학교 졸업생들은 졸업 시험 결과에 따라 한국의 고등학교 단계라 할 수 있는 과정을 밟는다.

전-대학(pre-university)과정은 2년 과정의 주니어 칼리지(junior college)나 3년 과정의 심화학교(centralized institute), 3년 동안 기술 분야의 실습 위주 교육을 제공하는 기술전문학교(polytechnic), 또는 2년 과정의 기술교육원(Institute of Technical Education, ITE)에 진학한다. 전-대학과정은 세 가지로 나뉘는데, H1 과정은 경영이나 사회과학 부분을 전공하기 위한 학생들을 위해 제공되는 과정이며, H2 과정은 수학이나 과학, 공학을 전공하기 위한 학생, H3 과정은 수학을 전공하기를 희망하는 학생들에게 제공하는 교육과정으로 분리된다. 중등과정까지는 국가 교육과정으로 운영되지만, 전-대학단계에서는 국가 교육과정으로 운영되지 않으며, 싱가포르의 대학 수학 능력 시험에 해당하는 GCE A-level의 평가 범위를 안내하는 문서에 맞추어 각 학교마다 자유롭게 운영된다(MOE, 2012).

싱가포르에서의 수학교육은 21세기 시민을 위한 교육으로 수학교육이 필수적이라고 보며, 장기적으로 나라의 우수한 인재를 육성하고, 개인이 21세기 시민으로서 생산적인 삶을 준비하기 위해 교육 체계에서 담당해야하는 가장 중요한 기본 과목으로 보고 있다. 수학 교육을 통해, 논리적으로 사고하기, 추상적으로 사고하기, 비판적이며 창의적으로 사고하는 능력과 같은 21세기 역량을 갖춘 학생이자 평생 학습자로서 태도를 길러야 한다고 보고 있다. 이에 공학도구의 사용으로 디지털 내러티브에 익숙하고 다른 방식으로 사고할 21세기 학습의 모습을 교육과정에 반영해야 한다고 보았으며, 싱가포르의 중등 수학과 교육과정에서도 그 노력이 드러난다.

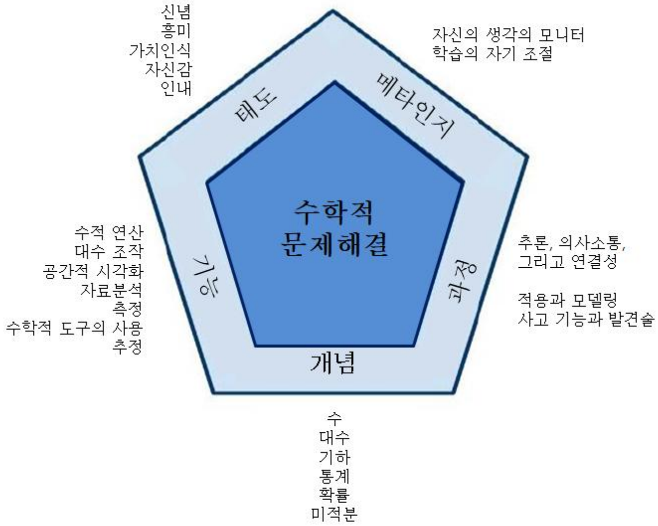
---

11) 그림의 Additional Mathematics는 O-levle과 N(A)-level과 비교하여 대영역 면에서 차이가 있다. O-level과 N(A)-level에서의 대영역은 Number and Algebra, Geometry and Measurement, Statistics and Probability 3개이며, Addinitionl Mathematics의 대영역은 Algebra, Geometry and Trigonometry, Calculus로 구분된다.

앞서 기술한 바와 같이 싱가포르의 교육은 위와 같이 수준과 향후 진학과 관련하여 단계를 엄격하게 구별하고, 다양한 과정을 선택할 수 있도록 하고 있으며, 각 수준에 따라 기대되는 세부 교육 목표를 제시하고 있지만, 모든 영역에서 수학교육의 목적을 다음 세 가지로 기술하고 있다.

싱가포르의 수학교육의 광범위한 목적은 학생들이 다음과 같은 것을 할 수 있게 되는 것이다.

- 수학적 개념과 기능을 획득하고 적용하기
- 문제 해결을 수학적으로 접근하여, 인지적이고 메타인지적인 기능의 개발
- 수학에 대한 긍정적인 태도의 개발 (MOE, 2012, p.7)



[그림 Ⅲ-2] 싱가포르 수학교육과정에서 수학적 틀(MOE, 2012, p.14)

<표 Ⅲ-2> 수학적 틀의 요소 변천과정(Kaur, 2014, p.30)

요소	1991-2000	2001-2006	2007-2012	2013-
개념	-수 -기하 -대수 -통계	-수 -기하 -대수 -통계	-수 -기하 -대수 -통계 -확률 -미적분	-수 -기하 -대수 -통계 -확률 -미적분
기능	-추정과 근사 -암산 -의사소통 -수학적 도구의 사용 -산술적 조작 -대수 조작 -자료 취급	-추정과 근사 -암산 -의사소통 -수학적 도구의 사용 -산술적 조작 -대수 조작 -자료 취급	-수치적 계산 -대수적 조작 -공간의 시각화 -데이터 분석 -측정 -수학적 도구의 사용 -추정	-수치적 계산 -대수적 조작 -공간의 시각화 -데이터 분석 -측정 -수학적 도구의 사용 -추정
태도	-가치인식 -흥미 -자신감	-가치인식 -흥미 -자신감 -인내	-신념 -가치인식 -흥미 -자신감 -인내	-신념 -가치인식 -흥미 -자신감 -인내
메타인지	-자신의 생각의 모니터	-자신의 생각의 모니터	-자신의 생각의 모니터 -학습의 자기조절	-자신의 생각의 모니터 -학습의 자기조절
과정	-발견술 -연역적 추론 -귀납적 추론	-발견술 -사고 기능	-추론, 의사소통, 그리고 연결 -적용과 모델링 -발견술 -사고 기능	-추론, 의사소통, 그리고 연결 -적용과 모델링 -사고 기능과 발견술

수학적 틀은 싱가포르의 교육의 목적에 부합한 틀로서, 1990년부터 싱가포르 수학 교육과정을 설명하는 대표적인 모형이다. 이 틀에서 보여주듯 싱가포르 수학교육의 기본은 문제해결에 두고 있다. 문제해결의 강조는 싱가포르의 교수, 학습, 평가면에서 지침을 제공한다.

싱가포르 교육과정에서는 수학 교수・학습 과정에서 제공해야 하는 학

습의 기회와 교수·학습의 원리를 다음과 같이 서술하고 있다.

학생들은 다음과 같은 기회를 가져야 한다.

- 의미 있게 정보를 조직하고 노트를 기록한다.
- 기본적인 수학적 기능을 숙달 할 수 있도록 연습한다.
- 학습을 증진시키기 위해 평가를 통해 피드백을 사용한다.
- 모든 발견술을 사용하여 새로운 문제를 해결한다.
- 추론의 기능을 발달시키기 위해 생각을 분명히 표현하고, 논의하고, 설명한다.
- 모델링 프로젝트를 수행한다. (p. 20)

교수의 원리

- 원리 1: 교수는 학습을 위한 것이며, 학습은 이해를 위한 것이며, 이해는 추론과 적용을 위하며 궁극적으로 문제해결을 위한 것이다.
- 원리 2: 교수는 학생들의 지식을 기반으로 해야 하며, 학생들의 흥미와 경험을 인지해야 하고, 활발하고 성찰하는 학습에 학생들이 참여할 수 있도록 해야 한다.
- 원리 3: 교수는 실제 세계에 학습을 연결하고, ICT 도구를 활용하며, 21세기 역량을 강조해야 한다.

학습의 단계

- 단계 1 - 준비: 사전지식, 동기 부여 맥락, 그리고 학습 환경
- 단계 2 - 참여: 활동 기반 학습, 교사 주도의 탐구, 그리고 직접 교수
- 단계 3 - 숙달: 동기가 부연된 연습, 성찰적인 검토, 그리고 연장(extended) 학습

싱가포르 학생들은 세 차례의 국가시험을 치러야 하고, 그 결과를 바탕으로 자신의 학습 경로를 결정할 수 있다. 중등학교 10학년을 마치고 치러지는 GCE O-level의 시험은 짧은 단답형의 25문항으로 총 80점에 해당하는 1차시 시험과 10~11개의 실생활 맥락에서 수학을 적용할 수 있는 문제로 2차시 시험이 있다. 1차시와 2차시 시험은 각각 2시간과 2시간 30분씩 치러지며, 학생들은 두 차시 수업에서 기하적 도구를 활용할 수 있으며, 계산기를 사용할 수 도 있다.

싱가포르 국가시험의 수학 문항은 하위 문제와 조건들이 복잡하게 제시된다(Kaur, Har & Kapur, 2009). 다음은 2007년 10학년 국가시험의 예이다.

파리 한 마리 F가 벡터 (i+12j)cm 위치에서 시작하고 (3i+2j)cm/s의 속도로 표면을 기어서 건너간다. 파리가 기어가려고 출발함과 동시에 (85i+5j)cm 위치에 있던 거미S가 (-5i+kj)cm/s 의 속도로 표면을 기어가려고 출발한다. 이때 k는 상수이다. 거미가 파리를 잡았을 때, k의 값을 구하여라.

[그림 Ⅲ-3] 2007년 GCE-O 수준 시험 문항(Kaur, Har & Kapur, 2009)

싱가포르 학생들은 대학에 입학하기 위하여, 영국과 같은 A-level(Gneral Certification of Education Advanced Level) 시험을 치른다. 싱가포르 시험 및 평가 기관(Singapore Examinations and assessment Board, SEAB)에서 주관하여 연 1회 시험을 치르는데, 수학 시험은 H1, H2, H3로 구성된다. H1은 순수 수학 35점과 통계학 65점으로 이루어져 있고, H2는 순수 수학으로 1차 시험이, 순수수학(40점)+통계학(60점)으로 2차 시험이 있다. H3은 세 가지 주제로 구성되어 있는데, 주제1은 함수와 그래프, 수열과 급수, 미적분 주제2는 조합론, 주제3은 수학적 모델로서의 미분방정식이다. 각 주제별로 40%, 25%, 35%의 점수가 배정되어 있다. 약 5주 동안 1일에 1~2과목을 과목당 3시간씩 오전 오후에 시행한다. 그리고 학생들 시험에 계산기를 활용이 자유로우며, 수학 공식집도 주어진다(장경윤 외, 2016).

2014년 A-level에서 치러진 H1는 12문항, H2는 시험 1과 2에서 모두 11문항 씩 출제되었다. 이래 그림은 2014년 출제된 문항의 예이다.

문제 8

(a) 아래의 (i)과 (ii)을 각각 만족하는 경우에 x와 y가 근사적으로 $y=px^2+t$의 관계를 가질 때 예상되는 산점도를 그려라. 산점도는 6개의 점을 포함해야 하며, x에 관하여 그리고 모든 양수 x값에 관하여 동일한 간격이어야 한다.

(i) p와 t가 모두 양수인 경우

(ii) p가 음수이고 t가 양수인 경우

(b) 특정 모델의 중고차 10대로 이루어진 임의표본에서 각 차량의 연식(m개월 사용)과 가격(P달러)은 아래 표와 같다.

m	11	20	28	36	40	47	58	62	68	75
P	112800	102600	76500	72000	72000	69000	65800	57000	50600	47600

m개월 후 차량의 가격은 식 $P=am+b$, $P=c\ln m+d$ 중 하나로 모델링할 수 있다(단, a, b, c, d는 상수).

(i) (A) m과 P 사이, 그리고 (B) $\ln m$과 P 사이의 곱적률상관 값을 각각 소수 넷째자리까지 정확히 구하여라.

(ii) 회귀곡선방정식을 이용하여 50개월을 사용한 자동차의 가격을 추정하여라.

[그림 Ⅲ-4] 2014년 GCE-A 수준 문항(I) (남진영, 탁병주 2016, p. 300)

문제 8

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}(-3<x<3)$에 대하여,

(i) $\int f(x)dx$를 구하여라.

(ii) $f(x)$의 이항전개를 x^6항까지 구하고 그 계수를 기약분수로 나타내어라.

(iii) $\sin^{-1}(x/3)$의 매클로린 급수에서 처음 0이 아닌 4개의 항을 구하고, 그 계수를 기약분수로 나타내어라.

[그림 Ⅲ-5] 2014년 GCE-A 수준 문항(II) (남진영, 탁병주, 2016, p.296)

싱가포르 대입의 모든 수학문항은 서술형으로 진행된다. 각 문항의 하위문항이 있고, 하위 문항에 다시 하위 문항이 출제되어 내용 영역을 종합적으로 평가한다. 하위 문항의 내용영역은 여러 내용 영역에 걸쳐 출제되기도 한다. 학생들은 공식집과 계산기를 시험과정에서 활용할 수 있으며, 하루 두 과목씩 여러 날 동안 시험을 치룬다. 학생들의 선택권이 강하고, 수학을 선택한 학생들은 높은 수준까지 학습을 한다. 시험기간은 H1은 3시간, H2는 6시간 H3은 3시간으로 비교적 긴 편이다.

다. 한국과 싱가포르의 수학과 교육과정 및 교과서: 인수분해 학습을 중심으로

싱가포르 교육과정은 Number and Algebra를 대영역으로 하여, 한국의 교육과정에서 대영역으로 하고 있는 수와 연산, 문자와 식, 그리고 함수의 영역 일부를 가르치고 있다. 한국의 인수분해 교육과정은 중학교 3학년 과정에서 일괄적으로 학습하지만, 싱가포르의 경우는 1학년에서 공통 인수를 뽑아 인수분해 하는 것을 배우고, 2학년에 다항식의 곱셈과 함께 인수분해를 학습하게 된다. 인수분해와 관련하여 식의 계산과 인수분해 관련 2009 개정 수학과 교육과정과 싱가포르의 교육과정 내용을 비교 분석하면 아래의 표와 같다(교육과학기술부, 2011; MOE, 2012). 대수 전체 영역에서의 비교는 부록 1을 참고하여라.[12]

<표 Ⅲ-3> 한국과 싱가포르 수학과 교육과정 비교: 인수분해 중심으로

2009 개정 교육과정				싱가포르 교육과정 (2011 개정)		
영역		내용요소	성취기준	내용	주제	학년
문자와 식	중1	문자의 사용과 식의 계산	다양한 상황을 문자를 사용한 식으로 간단히 나타낼 수 있다.	5.1. 수를 표현하기 위해 문자 사용하기	대수적 표현과 식	1
			식의 값을 구할 수 있다.	5.2. 표기법의 이해하기 $a\times b$를 ab로, $a\div b$ 또는 $a\times\frac{1}{b}$를 $\frac{a}{b}$로, $a\times a$를 a^2로, $a\times a\times a$를 a^3로, $a\times a\times b$를 a^2b로, $y+y+y$ 또는 $3\times y$를 $3y$로, $3\times(x+y)$를 $3(x+y)$로,		

12) 서동엽(2016)은 2015개정 수학과 교육과정과 2011년 개정 된 싱가포르의 중학교 수학과 교육과정을 전 영역에서 비교 분석하였다.

				$(3+y)\div 5$ 또는 $\frac{1}{5}\times(3+y)$를 $\frac{3+y}{5}$로 이해하기 5.3. 대수적 표현과 식 값		
			일차식의 덧셈과 뺄셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.	5.6. 일차식의 덧셈과 뺄셈		
중2	식의 계산		이차식의 덧셈과 뺄셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.	5.9. 대수식의 곱과 전개 5.10. 등식의 변형	대수적 표현과 식	2
			지수법칙을 이해한다.			
			다항식의 곱셈의 원리를 이해하고, 곱셈 공식을 유도할 수 있다.	5.12. 다음 식을 이용하기 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$		
			다항식의 나눗셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.	5.15. 간단한 분수식의 곱셈과 나눗셈 예) $\left(\frac{3a}{4b^2}\right)\left(\frac{5ab}{3}\right)$, $\frac{3a}{4}\div\frac{9a^2}{10}$		
			<중3>	5.13. $ax+bx+kay+by$과 같은 일차식의 인수분해 하기 5.14. ax^2+bx+c과 같은 이차식을 인수분해 하기		
	중3	다항식의 인수분해	인수분해의 뜻을 알고, 인수분해를 할 수 있다.	<중등2>		3

다항식의 전개와 인수분해와 관련하여 2009 개정 수학과 교육과정 한

국과 싱가포르의 교육과정을 비교해 보자. 내용적인 면에서 한국은 인수분해 전에 대항식의 전개와 곱셈공식을 1학년과 2학년에 걸쳐 학습을 하고, 3학년 과정에서 다항식의 인수분해를 학습하지만, 싱가포르 교육과정에서는 다항식의 전개와 곱셈공식과 인수분해가 한 주제로 주로 2학년 과정에서 학습되고 있다. 싱가포르의 교육과정은 나선형 교육과정이기 때문에 1학년 때 간단한 다항식의 전개를 학습하고 2학년 과정에서는 좀 더 복잡한 다항식의 전개와 함께 인수분해를 같이 학습한다. 한국에서는 중3에서 중2때 다루던 다항식의 곱셈을 인수분해와 함께 다루도록 하고 있다. 또한 교수·학습 방법 및 유의사항에는 다루어야 할 다항식의 곱셈과 인수분해를 다음과 같이 명시적으로 제시하고 있다. 그리고 이것은 인수분해 공식으로 간주된다.

⑤ 곱셈공식은 다음의 경우만 다룬다.

$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ $\quad (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ $\quad (a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ $\quad (ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

⑥ 인수분해공식은 다음의 경우만 다룬다.

$ma+mb=m(a+b)$ $\quad a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ $\quad a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ $\quad acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

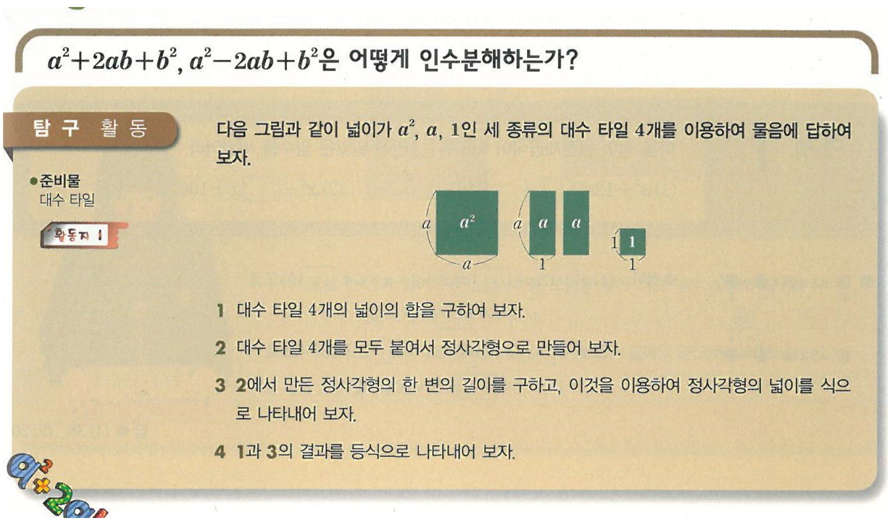
⑦ 복잡한 형태의 인수분해는 다루지 않는다.

[그림 Ⅲ-6] 2009 개정 수학과 교육과정의 "교수·학습 방법 및 유의사항"(한국과학창의재단, 2011, pp. 171-172)

그러나 싱가포르에서 다루고 있는 곱셈 공식은 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 세 가지 정도이고, $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$와 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$가 교과서 전면에 인수분해 공식으로(또는 곱셈 공식으로) 등장하지는 않는다.

싱가포르의 교과서와 교육과정 분석을 통해서 각 나라에서 인수분해를

학습하는 과정에서 사용하는 문화적 도구에 차이가 있음을 분석할 수 있었다. 아래 그림은 한국의 중학교 3학년 교과서에서 인수분해의 원리를 설명하기 위하여 넓이를 도입하는 대표적인 예를 보여준다.


$a^2+2ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$은 어떻게 인수분해하는가?

탐구 활동

●준비물
대수 타일

활동지 1

다음 그림과 같이 넓이가 a^2, a, 1인 세 종류의 대수 타일 4개를 이용하여 물음에 답하여 보자.

1 대수 타일 4개의 넓이의 합을 구하여 보자.

2 대수 타일 4개를 모두 붙여서 정사각형으로 만들어 보자.

3 2에서 만든 정사각형의 한 변의 길이를 구하고, 이것을 이용하여 정사각형의 넓이를 식으로 나타내어 보자.

4 1과 3의 결과를 등식으로 나타내어 보자.

[그림 Ⅲ-7] 중학수학 3(신항균, 이광연, 황혜정, 윤혜영, 이지연, 2011, p. 63)

전개되어 있는 이차식과 같은 넓이를 가진 사각형들의 모임을 적당히 배치하여 하나의 직사각형으로 만들 수 있고, 재배치되어 만들어진 큰 직사각형의 넓이를 표현하면 인수분해 된 식과 같다는 것이다. 이러한 설명은 대부분의 인수분해의 원리를 설명하는 도구가 되었다. 이러한 방식으로 인수분해의 원리를 설명하는 데에는 한계가 있는데, 특히 이차항의 계수가 음수인 경우에 문제가 발생한다. 실제 한국 수학교과서 에서는 최고차항이 음수인 인수분해는 등장하지 않는다.

또한 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ 와 같은 인수분해를 학습할 때, 풀이의 도구로 표를 활용하였고, $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$와 같은 인수분해를 할 때 등장하는 풀이도구는 아래의 그림과 같이 대각선을 활용한다.

다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^2-3x+2 (2) x^2-2x-8

● 풀이 (1) 곱이 2인 두 정수 중에서 합이 -3이 되는 수는 -1과 -2이다.

따라서 주어진 식을 인수분해하면

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

곱이 2인 두 정수	합
1, 2	3
-1, -2	-3

(2) 곱이 -8인 두 정수 중에서 합이 -2가 되는 수는 2와 -4이다.

따라서 주어진 식을 인수분해하면

$$x^2-2x-8=(x+2)(x-4)$$

곱이 -8인 두 정수	합
1, -8	-7
2, -4	-2
-1, 8	7
-2, 4	2

답 ● (1) $(x-1)(x-2)$ (2) $(x+2)(x-4)$

[그림 Ⅲ-8] 중학수학 3(신항균, 이광연, 황혜정, 윤혜영, 이지연, 2011, p.67)

다음 식을 인수분해하여라.

(1) $2x^2+7x+3$ (2) $3x^2-10x-8$

● 풀이 (1) 주어진 식은 인수분해 공식 [4]에서

$$ac=2,\ ad+bc=7,\ bd=3$$

인 경우이므로 이를 만족시키는 정수를 오른쪽과 같이 찾아 인수분해하면

$$2x^2+7x+3=(x+3)(2x+1)$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & \longrightarrow 6 \\ 2 & 1 & \longrightarrow 1 \\ \hline & & 7 \end{array}$$

(2) 주어진 식은 인수분해 공식 [4]에서

$$ac=3,\ ad+bc=-10,\ bd=-8$$

인 경우이므로 이를 만족시키는 정수를 오른쪽과 같이 찾아 인수분해하면

$$3x^2-10x-8=(x-4)(3x+2)$$

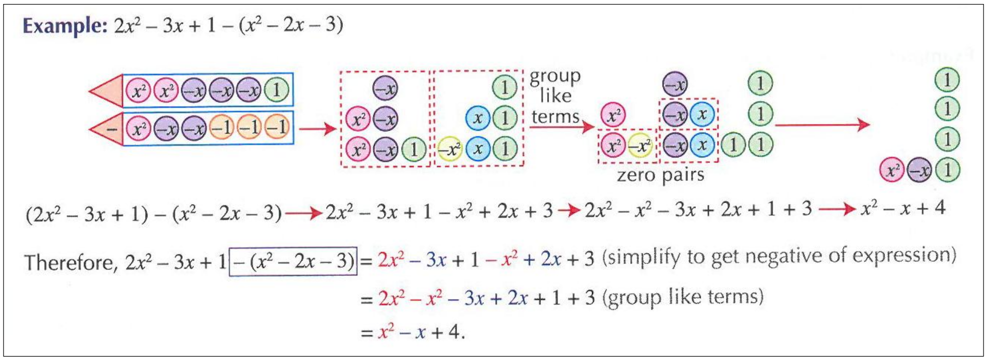
$$\begin{array}{ccc} 1 & -4 & \longrightarrow -12 \\ 3 & 2 & \longrightarrow 2 \\ \hline & & -10 \end{array}$$

답 ● (1) $(x+3)(2x+1)$ (2) $(x-4)(3x+2)$

[그림 Ⅲ-9] 중학수학 3(신항균, 이광연, 황혜정, 윤혜영, 이지연, 2011, p. 69)

학생들이 인수분해 할 때, 추론의 도구로 사용하고 있는 표와 대각선은 한국의 수학교실에서 나타나는 문화적 도구이다. 한국 학생들은 특정한 형태의 인수분해를 해결하기 위해서는 대각선의 표현이 익숙해져야 하고, 그것을 통해 인수분해를 학습하는 것을 기대한다.

싱가포르에서 인수분해를 학습하는 과정에서는 어떠한 문화적 도구를 사용하는지 보자. 다음은 싱가포르 2학년 교과서 "Expansion and factorisation of qudratic expression" 단원의 일부이다.

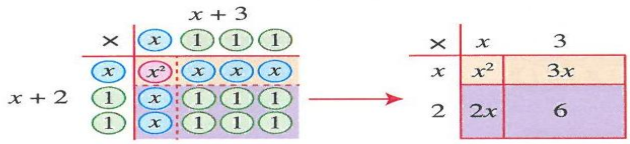


[그림 Ⅲ-10] 싱가포르 중등학교 2학년 수학교과서(Yeo, Seng, Yee, Chow, Meng et al., 2015, p.76)

위 교과서는 Algedisc를 활용한 식의 계산을 설명한 것이다. Algedisc는 앞뒤의 색이 다른 원판 모양의 카드로 한 면에는 $x^2, x, 1$와 그 뒷면에는 $-x^2, -x, -1$이 기록되어 있다. 이 카드를 이용하여, 식의 계산을 하는데 사용한다. 위와 같이 (x^2-2x-3)의 괄호 밖에 음수가 있는 경우 나열한 Algedisc를 뒤집고 그것을 정리하여 식을 계산하는 것이다.

다항식의 곱과 인수분해를 학습하는 과정에서도 이것은 곱셈표와 함께 유용하게 사용된다. 다음은 Algedisc와 그것을 활용하는 곱셈표와 관련된 교과서 내용이다. 싱가포르 교육과정에서는 다항식의 전개와 인수분해를 함께 학습하기 때문에 이 곱셈표는 추 후 인수분해 과정에서 추론의 도구로 매우 중요한 역할을 한다.

Example: $(x+2)(x+3)$
First, we multiply each disc in $x+3$ by x.
Next, we multiply each disc in $x+3$ by 2.



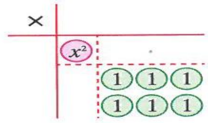
Therefore, $(x+2)(x+3) = x(x+3) + 2(x+3)$
$= x^2 + 3x + 2x + 6$
$= x^2 + 5x + 6.$

[그림 Ⅲ-11] 싱가포르 중등학교 2학년 수학교과서(Yeo, Seng, Yee, Chow, Meng et al., 2015, p. 82)

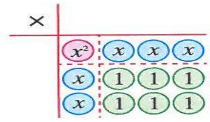
Since factorisation is the reverse of expansion, when we factorise a quadratic expression, we will obtain two linear factors. Hence,

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 6 &= x^2 + 3x + 2x + 6 \\ &= x(x+3) + 2(x+3) \\ &= (x+2)(x+3). \end{aligned}$$

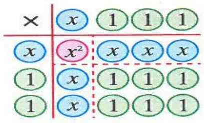
Algebra discs can also be used to factorise quadratic expressions. To factorise $x^2 + 5x + 6$, we first form a rectangular array with the x^2 disc at the top-left region and the six 1 discs at the bottom-right region.



Next, we put in the five x discs to form the rectangle.



Thus we have:



Hence, the two linear factors are $x+2$ and $x+3$.

Notice that in this case, the constant term 6 is factorised into 2×3 and the five x discs ($5x$) are divided into two groups ($2x$ and $3x$) to complete the rectangle.

[그림 Ⅲ-12] 싱가포르 중등학교 2학년 수학교과서(Yeo, Seng, Yee, Chow, Meng et al., 2015, p. 88)

싱가포르 교과서에서 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$와 같은 인수분해를 하기 위해서 사용하고 있는 도구는 Algedisc와 곱셈표이다. x^2디스크와 x, 1을 나타내는 디스크를 적당히 직사각형의 모양이 되도록 만드는 것 그것이 인수분해를 위한 추론의 방식인 것이다. 한편, $y=ax^2+bx+c$과 같은 일반적인 인수분해는 AlgeDisc™이나 AlgeTool™과 같은 소프트웨어의 활용을 권장한다고 교육과정에 명시되어 있다.

한국에서의 인수분해의 학습은 여러 가지 곱셈공식의 순서에 따라 공통인수로 인수분해 하는 것을 가장 먼저 학습한다. 특히, 공통인수로 인수분해 하기에는 공통인수가 다항식인 경우도 함께 다룬다. 따라서 다른 인수분해 공식을 학습하기 전에 그룹핑(grouping)하여 인수분해 하는 것을 먼저 학습한다.

그러나 싱가포르의 교과서에서는 아래와 같은 꼴의 인수분해를 학습한 이 후에 그룹핑으로 인수분해 하는 것을 학습한다.

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2,$$
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$
$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

이러한 학습내용 주제를 전개의 차이는 한국과 싱가포르에서 사용하는 인수분해를 위한 추론의 도구가 서로 다르기 때문으로 해석할 수 있다. Algedisc와 곱셈표를 활용하여 인수분해 할 수 있는 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$꼴의 인수분해를 학습한 이후에 공통인수가 다항식인 인수분해를 학습하게 되는 것이다.

라. 한국과 싱가포르의 수학과 교육과정과 교과서: 닮음과 합동을 중심으로

O-level과 N(A)-level에서의 대영역으로 있는 Geometry and Measurement는 한국의 기하 영역과 대응된다고 할 수 있다. 2015개정

수학과 교육과정과 싱가포르의 교육과정을 합동과 닮음을 중심으로 정리하면 다음과 같다(교육부, 2015; MOE, 2012).

<표 Ⅲ-4> 한국과 싱가포르 수학과 교육과정 비교: 합동과 닮음을 중심으로

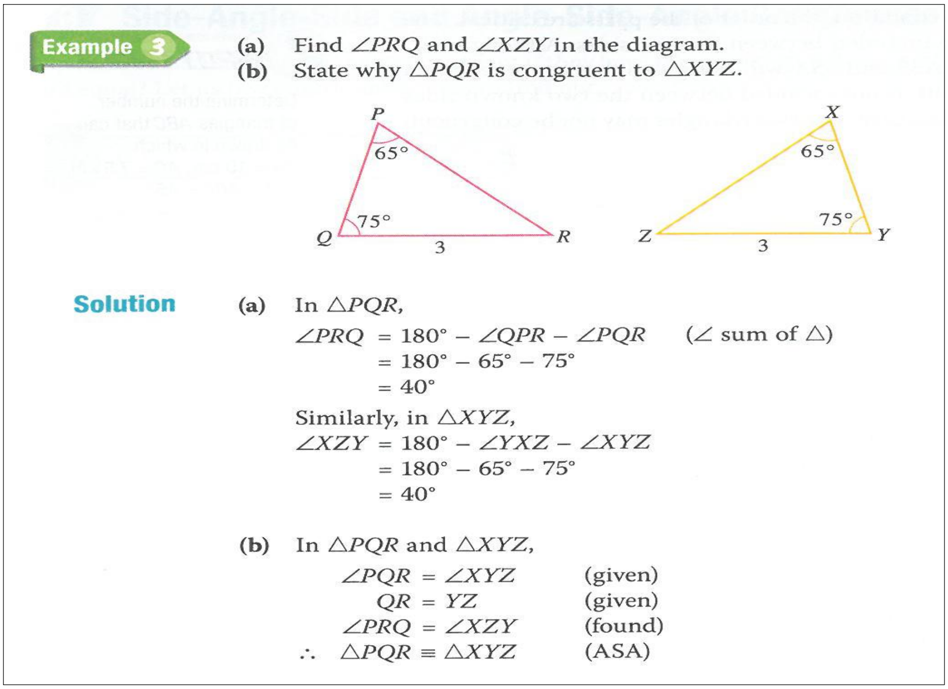
<table>
<tr><td colspan="3">2015 개정 교육과정</td><td colspan="3">싱가포르 교육과정 (2011년 개정)</td></tr>
<tr><td>학년</td><td>단원</td><td>내용</td><td>내용</td><td>주제</td><td>학년</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1학년</td><td rowspan="2">작도와 합동</td><td>삼각형을 작도</td><td>1.4.삼각형의 성질, 대칭의 성질이 포함된 특별한 사각형과 다각형(오각형, 육각형, 팔각형, 십각형)</td><td rowspan="2">각, 삼각형 그리고 다각형</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>삼각형의 합동 조건과 판별</td><td><중등2, 중등3></td></tr>
<tr><td rowspan="4">2학년</td><td rowspan="4">도형의 닮음</td><td><중 1></td><td>2.1. 도형의 합동</td><td rowspan="4">합동과 닮음</td><td rowspan="4">2</td></tr>
<tr><td>도형의 닮음</td><td>2.2. 도형의 닮음
2.2. 도형의 닮음
2.4. 평면도형의 확대와 축소
2.5. 비례척도
2.6. 합동과 닮음을 이용한 문제해결</td></tr>
<tr><td>삼각형의 닮음 조건과 판별</td><td>2.3. 닮은 삼각형과 다각형의 성질: 대응하는 각이 같음, 대응하는 변의 비가 같음
<중등3></td></tr>
<tr><td>평행선 사이의 선분의 길이 비</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td><중1. 중2></td><td>2.7. 두 삼각형의 합동과 닮음 판별하기</td><td rowspan="3">합동과 닮음</td><td rowspan="3">3</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>2.8. 닮은 평면도형의 넓이 비</td></tr>
<tr><td>2.9. 닮은 입체도형의 부피 비</td></tr>
</table>

한국의 교육과정에서는 중학교 1학년 때, 삼각형의 합동과 합동조건을 학습하고, 2학년 때, 닮음과 삼각형의 닮음 조건을 학습하는 반면, 싱가포르의 교육과정에서는 합동과 닮음이 같은 단원으로 2, 3학년 과정에 걸쳐 학습한다. 즉, 나선형 교육과정에 따라 합동과 닮음의 의미를 2학년 때, 그리고 합동의 조건이나 닮음 조건은 3학년 때 학습한다. 도입 시기면에서는 한국의 학생들이 두 영역에 대해서는 빨리 도입한다고 할 수 있다. 또한 한국의 2015개정 수학과 교육과정에서는 닮음의 활용 부분이 삭제되어 닮은 도형의 넓이비와 부피비에 관해 탐구하지 않는다. 싱가포르의 경우에는 중2에서 ‘평면 도형의 확대와 축소 그리고 비례척도(scale drawing)’를 중3에서 “닮음인 평면도형의 넓이 비와 닮음인 입체도형의 부피비”를 학습한다. 기타 합동과 닮음에서 한국과 싱가포르의 교육과정상에서 나타나는 차이는 한국의 경우에는 합동과 닮음인 경우에 각각 ≡, ∽ 를 사용하지만 싱가포르에서는 합동기호만 사용하고, 닮음기호는 가르치지 않는다는 점, 그리고 싱가포르에서는 합동 조건으로 RHS 합동 조건 만을 다룬다는 점이 있다.

한편 피타고라스 정리는 싱가포르 교육과정에서 중2과정에서 합동과 닮음인 도형을 학습한 이후에 배우게 되며, 합동 조건과 닮음 조건을 학습하기 전에 배우게 된다. 한국의 교육과정에서는 2009개정 교육과정에서는 중학교 3학년 과정으로 되었던 피타고라스 정리가 더 간략한 형태고 중학교 2학년으로 하향 조정되었으며, 그것은 도형의 닮음을 학습한 이후에 진행된다.

피타고라스정리가 닮음을 학습하기 전에 배치된 싱가포르의 교육과정에서와 닮음 이후에 배치되어 있는 한국의 교육과정에서 학생들이 닮음을 학습할 때, 차이가 있을 수 있다. 예를 들어 싱가포르 수업에서는 직각삼각형의 닮음을 설명하면서 파타고라서의 정리를 이용하여, 직각삼각형의 닮음 조건에 관한 논의로 확장할 가능성이 있다.

다음은 한국과 싱가포르의 수학교과서에 삼각형의 합동과 닮음과 관련한 서술의 방식의 차이를 설명하고자 한다. 특히 정당화 가정을 기술하는 방식에서 한국과 싱가포르 교과서에서는 큰 차이를 보였다.



Example 3 (a) Find $\angle PRQ$ and $\angle XZY$ in the diagram.
(b) State why $\triangle PQR$ is congruent to $\triangle XYZ$.

Solution (a) In $\triangle PQR$,

$$\begin{aligned}\angle PRQ &= 180° - \angle QPR - \angle PQR \quad (\angle \text{ sum of } \triangle)\\ &= 180° - 65° - 75°\\ &= 40°\end{aligned}$$

Similarly, in $\triangle XYZ$,

$$\begin{aligned}\angle XZY &= 180° - \angle YXZ - \angle XYZ\\ &= 180° - 65° - 75°\\ &= 40°\end{aligned}$$

(b) In $\triangle PQR$ and $\triangle XYZ$,

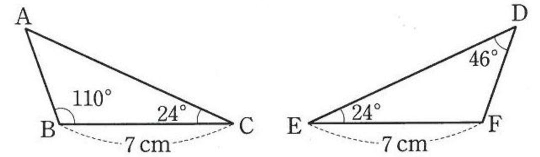
$$\begin{aligned}\angle PQR &= \angle XYZ && \text{(given)}\\ QR &= YZ && \text{(given)}\\ \angle PRQ &= \angle XZY && \text{(found)}\\ \therefore \quad \triangle PQR &\equiv \triangle XYZ && \text{(ASA)}\end{aligned}$$

[그림 Ⅲ-13] 싱가포르 중등학교 3학년(A) 수학교과서(Yeo, Seng, Yee, Chow, Hong et al, 2015, p. 106)

위 그림은 싱가포르 중학교 3학년 때, 사용하는 교과서읠 합동부분을 발췌한 것이다. 위의 예에서는 주어진 두 삼각형이 합동임을 보이기 위어여, 밝혀지지 않은 삼각형의 한 각의 크기를 구하고, 최종적으로 두 삼각형이 ASA의 닮음 조건에 의해 같음을 보인다. 수학적 기호를 통해 기술한 간결한 명제를 한 줄 한 줄 써 갈 때, 그 명제가 참임을 정당화 하는 근거를 괄호를 이용하여 기술하고 있다. 또한 괄호 안에 들어가는 수학적 성질이나 근거가 아주 정확하게 간결하게 서술되어 있음을 확인할 수 있다.

한국의 수학교과서에서 삼각형이 합동임을 보이는 예를 통해 그 증명을 표현하는 방식에 두 나라에 차이를 살펴보자. [그림 Ⅲ-14]는 위의 싱가포르 교과서에서 제시한 문항과 같이 주어진 삼각형이 합동임을 보이기 위해 각의 크기를 구하고, ASA 닮음 조건을 활용한다.

다음 두 삼각형이 합동인지 알아보아라. 합동이면 기호 ≡를 써서 나타내고, 삼각형의 합동 조건을 말하여라.



[풀이] △DEF에서

$$\angle F = 180° - (24° + 46°) = 110°$$

이다. △ABC와 △DFE에서

$$\overline{BC} = \overline{FE} = 7\ (\mathrm{cm}),\ \angle B = \angle F = 110°,\ \angle C = \angle E = 24°$$

이다. 따라서 대응하는 한 변의 길이가 같고, 그 양 끝각의 크기가 각각 같으므로 **△ABC≡△DFE(ASA 합동)**이다.

[그림 Ⅲ-14] 중학수학 1 (이준열 외, 2012, , p. 229)

먼저 삼각형의 남은 한 각인 110도를 구하기 위하여 교과서에 서술된 방식을 보자. 싱가포르 교과서에서 보여준 바와 같이 엄밀한 근거가 제시되어 있지는 않다. 따라서 “angle sum of triangle”이라는 용어는 싱가포르 수학교실에서는 중요하게 다루어지지만, 한국의 수학교실에서는 그 의미를 이해하는 것 이상으로 그 용어를 정확하게 사용하는 것이 요구되지는 않을 것으로 예상된다. 또, 한국의 수학교과서에서는 주어진 길이나 각은 바로 사용하지만, 싱가포르의 교과서에서는 “given”이라는 표현을 써서 주어진 정보를 활용하여 정당화를 하고 있음을 나타내기도 한다. 마지막으로, 한국의 교과서에서는 정당화를 위한 서술적 표현이 훨씬 더 많다. 싱가포르의 교과서는 서술적 표현은 전혀 등장하지 않으며, 수학적인 기호로 아주 간결하고 정확하게 증명(풀이)를 표현하고 있다.

각 나라의 교과서에서 수학적 정당화를 기술하는 면에서의 차이 뿐 만 아니라, 닮음을 설명하는 개념적인 면에서 차이가 있음을 확인할 수 있었다. 싱가포르의 수업에서는 닮음 조건은 매우 직관적으로 설명되고 있다. 싱가포르의 중2 워크북을 살펴보면, 아래와 같이 닮음의 의미와 닮음의 성질을 설명하고, 중3 과정에서는 닮음의 조건을 제시한다.

Two figures are **similar** if they have exactly the same shape but not necessarily the same size.

If two triangles are **similar**, then

- all the **corresponding angles are equal**,
  i.e. $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$;
- the **ratios of the corresponding sides are equal**,
  i.e. $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{A'C'}{AC} = k$, where k is a constant.

[그림 Ⅲ-15] 싱가포르 중등학교 2학년 수학교과서(Yeo, Seng, Yee, Chow, Meng et al., 2015, p. 208)

싱가포르의 교과서에서 설명하고 있는 닮음의 의미는 모양은 같지만 크기는 다른 것으로 그래서 삼각형의 닮음은 대응하는 변의 길이가 1이 아닌 상수로 일정하거나, 각의 크기가 모두 같은 삼각형을 서로 닮음을 학습한다.

반면 한국 수학교과서에서 기술되어 있는 닮음의 의미는 다음과 같다. 한 도형을 일정한 비율로 확대 또는 축소한 것이 다른 도형과 합동일 때, 이 두 도형을 닮음인 관계가 있다고 한다. 즉, 닮음임을 설명하기 위해서는 합동의 개념을 먼저 알아야 하며, 닮음인 관계를 보이고자 하는 두 도형과 한 도형을 확대(또는 축소)한 다른 도형 즉, 3개의 도형을 가지고 닮음의 의미를 도입한다. 이로부터 삼각형의 닮음 조건을 추론할 수 있게 한다. 위와 같은 방법으로 삼각형의 닮음의 조건이 삼각형의 합동의 조건으로부터 필요충분하게 3가지고 존재함을 설명한다.

싱가포르에서윌 닮음의 의미는 직관적인 반면, 한국에서의 닮음의 조건은 매우 엄밀하게 설명된다. 즉, 삼각형의 닮음 조건으로서 필요충분한지를 확인할 수 있도록 제시되어 있다. 한국 교육과정에서는 중학교 2학년에서 닮음도형의 학습은 다음과 같이 진행된다. 먼저, 닮음의 의미를 알고 닮은 도형의 성질을 이해하고, 그 뒤 삼각형의 닮음 조건을 학습한

다.

2015개정 수학과 교육과정에서는 기하영역에서 교육 할 기능으로 이해하기, 설명하기, 작도하기, 판별하기, 계산하기, 문제 해결하기, 추론하기, 정당화하기를 들었다. 특히 정당화 하기는 중학교 기하를 학습하면서 처음 나타난다. 도형의 성질을 정당화 하는 과정에서 요구되는 연역적 추론이 수학적 소양으로 요구된다. 2015개정 교육과정에서 “교수・학습 방법 및 유의사항”은 “공학적 도구나 다양한 교구를 이용하여 합동과 닮음의 의미를 이해하게 한다.”로 제안하고 있다. 정당화와 관련해서는 다음과 같이 서술하고 있다. “도형의 성질을 이해하고 설명하는 활동은 관찰이나 실험을 통해 확인하기, 사례나 근거를 제시하며 설명하기, 유사성에 근거하여 추론하기, 연역적으로 논증하기 등과 같은 다양한 정당화 방법을 학생 수준에 맞게 활용할 수 있다.” 또한 “평가 방법 및 유의사항”은 다음과 같이 서술한다.

(다) 평가 방법 및 유의 사항 • 복잡하게 변형된 평면도형의 넓이와 둘레의 길이, 입체도형의 겉넓이와 부피를 구하는 문제는 다루지 않는다. • 정확한 용어와 기호의 사용, 복잡한 형식 논리 규칙의 이용을 요구하는 연역적 정당화 문제는 다루지 않는다.

[그림 Ⅲ-16] 2015개정 수학과 교육과정(교육부, 2015, p. 35)

싱가포르 교육과정에서 정당화와 관련해서는 1학년 때 기하영역에서 각, 삼각형과 다각형을 학습하면서 진술된 명제들이 참인지 거짓인지를 정당화 하도록 하는 활동을 제안하기도 한지만, 엄격한 수학적 증명은 한국과 마찬가지고 고등학교 수준의 과정에서 처음으로 등장한다(MOE, 2012). 증명하기 관련하여, 한국 학생들이 처음 증명을 학습하게 되는 것은 고등학교 1학년 “수와 연산” 영역의 집합과 명제 개념을 학습하면서이다. 싱가포르 교육과정에서 증명은 전-대학 과정 중(H1, H2, 그리고 H3)에서 수학에 열정이 있는 학생이 선택하는 H3 과정에서 엄밀한 수학적 증명을 학습하게 된다. 싱가포르 교육과정에서 정당화는 Number and

Algebra 영역에서 상대방을 정당화하는 그룹 활동을 할 것을 제안한다[13].

2. 국제 비교 연구에서의 한국과 싱가포르 수학수업

Leung(2005, 2011)은 TIMSS 1999 비디오 연구를 바탕으로 동아시아의 수업 실행과 서구의 수업 실행을 비교하였고, 동아시아 수학교육의 근간을 유교문화적 관점으로 해석하였다. 동아시아 수학교실에 대한 유교문화적 해석은 동아시아 수학교육 연구의 시발점이 되었던 Leung(2001)의 연구에서 잘 드러나 있다.

Leung은 Brimer & Griffin(1985), Biggs(1994), Wong & Cheung(1997), 그리고 Wong(1998)의 연구를 정리하여 1990년대 까지 동아시아 수학교실에 대한 연구들이 설명하는 수학교실의 사태를 다음과 같이 정리하였다.

> 동아시아 나라의 교육과정은 내용 중심적이고 시험에 의존적인 특징을 띈다. 교수가 매우 고전적이며 최신의 교수방법을 무시하고 수학을 잘하면 수학을 잘 가르치는 것으로 생각하는 것 같다. 전체수업 형태로 이루어지고, 학생 수도 많고, 그룹 활동은 이루어지지 않으며, 교사 지배적인 교수가 이루어지고 학생들의 참여는 거의 없다. 수학적 사실을 기억하는 것이 강조되고, 학생들은 반복을 통해서 학습하며, 이해 없이 수학적 기능(skills)을 많이 연습한다. 학생이나 교사들은 높은 경쟁시험으로부터 과도한 압박을 받으며, 학생들은 학습을 즐거워하지 않는 것처럼 보인다고 말한다(Leung, 2001).

그러나 이러한 현상은 동아시아 국가가 서구의 관점과 다르게 가지고 있는 인간의 본성, 수학의 본성, 교수학습의 본성, 교사의 역할에 대한

---

13) 싱가포르 교육과정에서는 정확하게 “Work in groups to select and justify pairs of equivalent expressions.” 으로 기록되어 있다

이해의 차이를 바탕으로 재해석할 필요가 있다고 보았으며, Leung(2001)은 동양의 수업을 유교문화적 관점에서 바라보고 서양과 비교하며 6가지의 해석을 내놓았다.

첫째, 동아시아 나라는 지식의 본체(body)의 획득과 지식의 본체에 도달하기 위한 방법이라는 내용과 과정 두 가지 면을 모두 강조하는데, 이는 수학의 본성(nature)을 바라보는 시각의 차이에 근거한다고 보았으며, 이를 이해할 필요가 있다고 보았다. 그는 동아시아인들은 수학 학습의 과정 안에서 수학 내용의 중요성을 강조한다고 해석하였다(Leung, 2001).

둘째, 동아시아인들은 학습에서 이해를 강조한다. 그러나 서양과 다르게 비록 전반적인 이해에는 도달하지 못했을지라도 외우는 것이 학습의 하나의 방법으로 여겨진다는 것이다. 이는 수학학습의 본성에 대한 관점의 차이에서 비롯한다고 보았다. 즉, 반복(repeated)학습은 단순한 반복(route)학습이나 이해 없는 학습과 같은 의미는 아니며, 반복(repteated)된 수행과 암기를 통해 이해의 상호작용을 본다는 것이다(Leung, 2001).

셋째, 동양에서의 공부하기는 진지한 노력이자 열심히 해야 하는 것으로 기대되는 것이지 “즐기는” 것으로 간주되지 않는다는 것이다(Leung, 2001). 즉, 열심히 공부한 이후에 그 지식에 깊은 이해에 도달했을 때 오는 만족감으로 학습의 즐거움을 접근할 필요가 있다고 지적하였다. 학습 자체가 즐거워야 한다는 생각이 강한 서구권은 수업에서 다양한 게임과 활동을 접목시키기에, 국제 비교연구에서 서구 학생들이 “수학은 즐겁다”는 항목에 대한 응답이 긍정적인 것으로 나타난다고 해석하였다. 그러나 실제 서구권 수업을 관찰해보면 신나게 활동은 하지만 내용과 유기적으로 연결되지 못한 채 허망하게 끝나는 경우가 적지 않음을 지적하였다. 아시아권에서의 학습의 즐거움은 어렵게 공후한 후에 뒤늦게 전해지는 즐거움에 무게가 실려 있다. 실제 공부 자체가 직접적인 즐거움을 주는 경우는 드물고, 모르는 상태에서 앎의 상태로 옮겨갈 때 느긋하게 전달되는 희열이 바로 공부의 즐거움이다. 즉각적인 흥미와 학구적인 흥미를 구별할 필요가 있는데 국제비교 연구의 설문에서는 주로 표피적인 흥

미가 반영됨을 적시한 것이다.

넷째, 서구의 교육자들은 시험의 압박과 같은 것으로 생기는 외재적 동기가 학습에 해롭다고 여긴다. 그러나 동아시아에서는 적당한 압박은 건강한 것으로 생각된다. 이는 학습동기에 대한 서로 다른 관점 그리고 인간 존재의 본성에 대한 서로 다른 관점에 기인한다. 아주 중요한 공적 시험과 같은 외재적 동기는 학생들로 하여 학습에 매진하게 하고, 공부와 학습에 주의를 기울이게 할 것이다. 다만 어려운 점은 그 압박의 적정수준을 결정하는 것이다(Leung, 2001).

Yao(2000)에 따르면, 공자 관점에서 학습의 유일한 목적은 도덕적 행동의 고취와 도덕적 품성의 함양이다. 자신의 도덕적인 변화를 위해 유교에서는 읽고, 이해하고, 숙고하는 과정이 강조되고(Yao, 2000), 그 안에서 깨달음과 본받음을 중요하게 여겨 왔다. 이와 같은 교육에 대한 도덕적 관점과 배움의 의미는 학문에 임하는 학생들의 태도와 교사에 대한 관점에도 영향을 미쳐왔다.

다섯째, 동양에서 사회적인 상황 아래 함께 학습하는 것은 매우 소중한 것이며, 개인이 사회적 구조에 맞추는 것이 의무이다. 반면 서양의 문화에서는 독립적 그리고 개인적인 인간이 강조되어서 개별 교수 학습이 이상적인 것으로 간주되어 왔고, 교사의 역할은 개인 학습자의 요구를 충족시키는 것이다(Leung, 2001). 진리에 대한 동서양 차이는 유교적 관점이 갖는 차이점과 밀접하게 관련된다. 서구적 세계관과 유교적 세계관에서는 진리라는 개념이 각기 다른 방식으로 이해된다. 서구에서는 진리는 현실에 대한 인식으로, 세계에 대한 표상이다. 반면, 유교 문화에서는 진리는 수행적이며, 참여적이다. 유교의 진리는 인문주의적인 삶의 방식에 지식으로서 공동체와 상호의존적인 인간으로서 어떻게 살아야 할 것인가와 관련된다. 유교적 관점에서의 진리는 조화롭고, 공동체에 통합된 인간으로서 살아가는 방식에 대한 앎이며, 이는 현실에 대한 지식에 대응하는 진리라는 서구적 관점과 대조된다. 이로 인해, 유교 관점에서 이루어지는 교육은 집단을 강조한다는 점에서 개인을 강조하는 서구의 관점과 대비된다(Jarvis, 2009).

여섯째, 서양에서 교사가 필요한 것은 주로 교수법의 역량에 초점이 있지만 동아시아 전통에서 교사의 이미지는 수학 전문가로 교사의 역할에 대한 서로 다른 관점을 가진다. 동아시아에서 교사는 모범적인 삶의 실천을 보여주는 멘토로서의 역할이 기대되는데, Chen(2007)에 따르면 유교적 관점에서의 훌륭한 교사들은 멘토와 같이 행동하며, 이들은 아동의 사회적인 발달과 개인적인 발달, 그리고 정신적인 발달까지 안내한다.

Leung(2005, 2006, 2011)은 TIMSS 1999 비디오 연구의 홍콩과 일본의 수업을 유교문화적 관점에서 서구의 수업실행과 비교 하였다. 특히, 서구의 수업 실행과 동양의 홍콩과 일본의 수업 실행을 비교한 결과 동양의 수학교실은 교사의 말이 지배적이고, 학생들은 새로운 내용을 배울 기회가 더 많고, 학생들은 실생활과 관련이 적은 더 복잡한 문제들을 다루며, 수학 증명에 시간을 더 많이 보내는 것으로 밝혔다(Leung, 2005). 수업에 대한 질적 분석은 홍콩의 수업이 유일한 분석의 대상이 되었는데, 서구의 수업 실행과 비교한 결과 홍콩의 수학교실에서 상대적으로 고급 내용을 다루며, 좀 더 연역적인 추론과 일관성이 높은 수업을 하고, 좀 더 발달된 설명과 보다 많은 학생들이 참여하며, 전체적으로 질적 수준이 높음을 보인다고 분석하였다.

가. LPS에서 한국의 수학수업 분석 결과

앞서 설명한 바와 같이 LPS는 각국의 내부자적인 관점에서 자국의 수학수업을 내부자적 관점에서 적절한 주제를 가지고 분석하는 연구과 타국과 비교를 통해 각국의 수업을 이해하고자 하는 두 가지 방식으로 연구되었다.

LPS에서 내부자적인 관점에서 한국의 수업은 변이이론의 관점에서 분석되었으며, 3명의 한국 교사의 교수에서는 내용을 이해하는 과정보다 학습되는 수학적 내용에 좀 더 초점을 두는 것으로 분석되었다. 특히, Gu, Huang & Marton(2004)이 고안한 개념적 변이와 절차적 변이의 관점을 바탕으로 세 교사의 활동을 분석하였다. 개념적 변이는 다양한 관

점과 경험을 제공하여 개념이 내포하고 있는 여러 가지 측면을 보여주는 것이다. 절차적 변이는 논리적 또는 시간적으로 비계를 설정하는 것으로 문제해결에 도달해 가는데 지식 구조를 형성하는 과정과 관련된다고 할 수 있다. 한국 수업에서는 이전의 개념에서 다루어진 내용을 토대로 새로운 주제를 소개하면서 다양한 개념의 연계를 보여주거나, 비교와 대조를 통해 개념을 학습하거나, 개념을 표현하는 다양한 방법을 설명하는 등 개념적, 절차적 변이가 나타나는 것으로 분석되었다(Park & Leung, 2006).

박경미(2007)는 LPS에서 수집된 두 명의 한국 교사의 수업을 수업의 조직면에서 중국과 홍콩의 수업과 비교 분석하였다. 수업 조직은 시간에 따라 수업이 전체 활동인지, 모둠활동인지, 개인 활동인지를 조사하는 것이었다. 그 결과 미시적으로 보았을 때, 수업 조직의 패턴의 일관성이나, 각 수업 차시를 관통하는 특징 등이 발견되지는 않았으나, 10차시 전체 누적하여 각 수업 활동에 할애하는 시간이 거의 유사함을 밝혔다. 또한 교수 활동면에서 탐구, 설명, 요약, 연습, 숙제라는 다섯 가지 차원에서 수업을 코딩한 결과 한국의 수업은 차시별로 변화가 크지만 각 교수 활동에 평균적으로 할당된 시간은 거의 비슷한 것으로 드러났다. 이를 상하이와 홍콩의 수업과 비교 분석하였을 때, 상하이와 홍콩은 학교 간에 차이가 한국에 비해 큰 편임을 보이며, 한국 교실의 집단내 차이가 적은 편이라 추론하였다.

나. LPS에서 싱가포르 수학수업 분석 결과

Hoon, Kaur & Kiam(2006)은 싱가포르 수업 20차시를 분석하여, 수업의 절차적 특징과 빈번하게 나타나는 패턴을 확인하였다. 그들은 수업의 절차를 전체 교실 설명(D), 제자리 학습(S), 학생들의 활동에 대한 점검(R), 퀴즈(Q), 시험(T), 기타 총 6가지로 코딩하였고, 가장 빈번하게 나타나는 패턴은 설명-제자리학습-학생 활동 점검 이라는 DSR 패턴이었으며 DSRSR 또는 DSRSRSR의 패턴도 확인 되었다. 특히, DSR 패턴이

반복되는 가운데 점진적으로 내용의 수준이 높아지는 것을 확인하였다.

Kaur(2009)는 이와 비슷하게 싱가포르의 8학년 우수한 교사 3인의 수업을 10차시 비디오 분석한 결과, 전체 교실 설명(D), 제자리 학습(S), 전체교실 피드백(R) 이라는 특징이 공통적으로 모든 교사에게 나타났고, 그룹 퀴즈(Q)와 테스트(T)가 개별적인 교사의 특징으로 나타남을 확인하였다. 수학교사들의 교수 실행을 분석한 결과, Hoon, Kaur & Kiam(2006)와 같이 DSR이라는 순서로 반복 순환되면서 나타나는 것이 주요 특성으로 확인되었다. 이러한 교수의 사이클이 반복적으로 나타나는 것은 싱가포르의 나선형 교육과정의 특성을 아래 나타난 특징으로 보았다. 또한 교실 전체 설명에서 교사와 학생간의 I-R-F 패턴이 주로 확인되었으며, 교사는 체계적으로 점차 복잡해지는 과제를 선정해나가며 구조화된 교수를 진행한다는 점에서 교사 전문성을 확인하였다. 제자리 학습에서는 교사 중심으로 수업이 흐르는 것으로 보이지만, 논의의 내용이 자원이 되는 것은 학생들의 표현이나 학생이 해결한 과제 해결 방법이 된다는 점을 특징으로 밝혔다(Kaur, 2009).

싱가포르 수학교사와 학생들의 숙제의 활용 방법과 그에 대한 인식을 연구한 Kaur, Kiam & Hoon(2006)의 의하면, 교사들은 학생들의 수학적 사고를 강화하기 위한 목적으로 숙제를 활용하는 것으로 조사되었다. 또한 교사는 “연습이 완벽함을 만든다.”라는 관점을 가지고, 학생들에게 그날 학습 내용을 중심으로 과제를 제시하는 경우가 많으며, 학생들에게 교과서 이외 자원을 이용하여 학생들의 사고 과정을 평가하고 그것에 피드백을 주기 위한 숙제를 제시하기도 하는 것으로 밝혀졌다. 한편 학생들은 수학 숙제를 수학 개념을 향상하는 것, 개념을 연습하고 교정하는 것, 시험을 준비하기 위한 것, 자신의 지식을 평가하고 실수를 이해하도록 하는 것, 수학적 지식을 확장하기 위해 필요한 것으로 인식하는 것으로 밝혀졌다.

2009년 싱가포르 중등학교 8학년을 대상으로 수학과 수학학습에 대한 태도를 조사한 Quek & Fan(2009)의 연구는 국제 비교연구에서 보여주는 바와 같이 수학학습에 대해 일반적으로 긍정적인 태도를 갖는 것으로

보였다. 그러나 도전적인 문제를 해결하거나 자신의 삶에서 유용하다고 생각하는지에 대해서는 부정적인 태도를 보이기도 하였다. 구체적으로 살펴보면, 학생들은 일반적으로 수학에 대해 흥미를 가지고 있고(73%), 수학을 하는 것을 즐기지만(74%), 실제 수학수업에 참여에 대한 태도는 그보다 적은 학생들에게서 긍정적인 반응을 확인하였고(64%), 단지 학생의 49%정도가 수학을 학습하는 것을 즐긴다고 조사되었다. 즉 학생들은 수학은 흥미로운 과목이며, 수학을 하는 것을 즐기고는 싶으나, 수학 학습을 하는데 많은 시간을 투자하고 싶지는 않은 것으로 드러났다. 30% 이상의 학생들이 수학학습에 참여하는 것에 스트레스를 느끼고, 비슷한 수치로 학생들이 수학문제를 해결 하고 있을 때 상실감이나 긴장감을 느끼는 것으로 조사되었다. 게다가 22%의 학생들이 수학을 하는 것을 두려워하고 30%정도의 학생들은 수학시간에 자신감이 없는 것으로 드러났다.

IV. 연구 방법

이 연구는 한국과 싱가포르의 수학교실의 미시 문화적 특성을 분석하고 각 나라의 거시적 수준의 현상과의 밝혀진 미시적 수준의 수학 수학교실의 문화 특성을 통합적으로 이해하는 것은 목적으로 한다. 이를 위해 각 나라의 일상적인 수학수업에 관심을 두었으며, 두 나라에서 직접 교수 활동을 하고 있는 교사 중 가장 상위 직급이라고 할 수 있는 한국의 수석교사와 싱가포르의 리드교사로 선정하였으며, 각 나라의 수학교실의 사건과 현상에 대해 심층적으로 연구하는 질적 사례연구를 한다.

이 장에서는 이러한 연구목적에 따라 연구문제를 달성하기 위한 구체적인 연구방법들을 기술한다. 한국과 수석교사와 싱가포르의 리드교사를 사례로 선정하게 된 배경 그리고 연구 질문에 답하기 위한 구체적인 연구방법, 자료의 수집과 분석방법, 타당도 작업의 순으로 연구 방법을 기술한다.

1. 연구 참여자

교실수업이 다양한 수업상황과 관련하여 어떠한 문화적 특징이 나타내는가를 살펴보기 위해, 한국과 싱가포르의 한 개 학급을 선정하고 교실수업을 관찰하고 분석하였다. 이 연구는 일상적으로 수행되는 수학수업을 연구의 대상으로 삼았기 때문에, 엄격한 의도적 표본추출이 필요하지 않았다. 다만, 각 나라의 수업에서 해석을 위한 풍부한 정보를 제공 할 수 있는 수업이 무엇일지가 가장 중요하게 고려되었다.

연구자는 각 나라에서 우수교사 선발 및 교사 전문성 과정을 살핀 결과 한국의 수석교사제도와 싱가포르의 교육 서비스 전문성 발달과 경력 계획 프로그램(Educative Service Professional Development and Career Plan)을 탐색하였고(MOE, 2015), 최종적으로 한국의 수석교사와 싱가포

르의 리드교사를 연구의 참여자로 선정하였다.

가. 한국 수석교사 A와 수학교실 환경

한국에서 수석교사란 교과 및 수업 전문성이 탁월한 교사로, 자신의 전문성을 다른 교사와 공유할 수 있는 의지와 역량을 겸비한 교사를 의미한다(김희규, 2010). 그들은 몇 가지 역할을 수행하는데, 첫째, 교과전문가로서 단위학교의 수업 및 임상장학에 관한 권한과 책임을 갖는다. 둘째, 수업기술과 방법 자료를 개발한다. 셋째, 현장연구와 교내연수를 주도한다. 넷째, 학교와 지역수준의 교육과정 개발에 참여한다. 다섯째, 자격 및 일반연수와 양성기관의 교과교육 강의를 담당할 수 있다. 여섯째, 교원 및 전문직 임용고사, 각종 교내 평가 자료를 개발한다. 일곱째, 학교 프로그램 평가 등을 통한 전문적 기능을 수행한다.

한국에서 수석교사 교사 제도는 2011년 6월 법제화 되었고, 2012년 전국적으로 수석교사가 선발되었으며, 행정적으로 수석교사는 교감과 비슷한 정도의 위상과 처우를 받는다.

15년 이상의 교육경력을 가지고 교육 연구에 우수한 자질과 능력을 가진 사람 중에서 선발하는데, 수석교사의 선발 과정은 다음과 같은 단계를 갖는다. 우선 단위학교의 수석교사추천위원회의 추천을 받은 교원을 대상으로 서류심사 및 동료교원 면담과 현상 실사로 1단계 평가를 한다. 2단계는 수업 역량, 동료교사 지원 역량, 학생지도 역량 등의 역량평가를 실시한다. 이러한 과정을 거쳐 선발된 (중등)수석교사는 교육지원청별 교과 수요를 고려하여 단위학교에 배치된다. 수석교사는 연간 15일 이상 90시간 자격연수를 받아 지속적인 직무연수를 통해 이수 실적을 평가 받아야 한다. 매년 업무수행태도, 업무실적, 업무수행능력, 동료교사 만족도 평가로 업적을 평가하고, 매년 직무연수 이수 실적을 바탕으로 연수 실적을 평가한다. 임기는 4년이며, 임기 만료되었어도 재심사 후 재임용이 가능하다. 수석교사의 필수 직무는 수업과 교사지원활동으로 구분된다. 수업시수는 일반 교사의 50%로 경감할 수 있고, 교사지원활동에는 수업

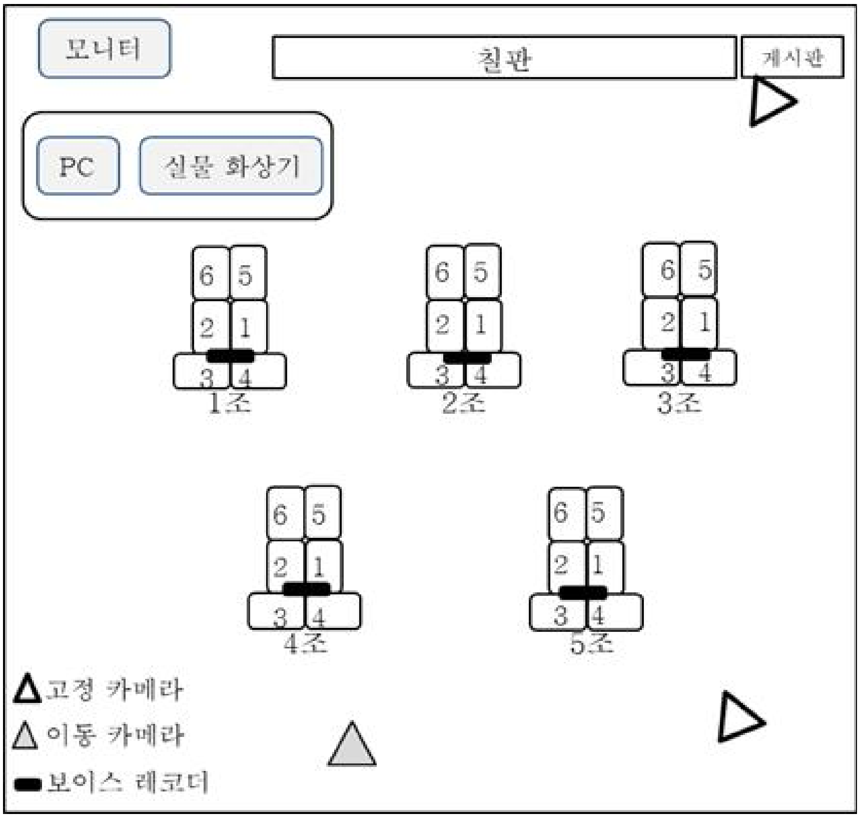
및 생활지도 컨설팅, 신임교사 및 교육실습생 지도, 연수 지원 및 강사활동, 자료개발 보급 및 연구 활동 등이 해당한다. 보조 직무는 학교교육과정 수립에 참여하거나 학부모대상 교육에 강사 활동 등이다.

수석교사를 대상을 모집하던 2016년 서울시 소재의 수학교과 중등 수석교사는 4명이었다. 연구자는 3명의 수석교사에게 연구의 목적을 설명하고, 연구의 참여 독려하였으며, 그 중 한 명의 수석교사는 참여를 정중히 거절하였으며, 다른 두 명은 연구의 참여를 승인해 주었다. 그 중 한 수석교사의 수업은 학교의 수업 일정에 따라 일상적으로 행해지는 수업은 아니었다. 학기 말 모든 교육과정 내용을 학습한 후 중요한 부분을 복습하는 수업으로 분석의 대상에서 제외되었다. 그리고 이 연구에 분석의 대상이 된 교사는 서울시 북부에 소재한 A중학교에서 가르치는 수석교사 A이다.[14)]

교사 A는 2013년 수석교사로 임명된 경력 23년차(2016년 기준) 교사이다. 수업을 참관한 2016년은 교사 A가 수석교사로 임명된 지 4년차 되던 해 이었으며, 4년 주기로 시행되는 재임용 절차에 통과하여 2017년 역시 수석교사로 활동하고 있다. 연구자가 수업을 참여관찰 한 2016년 당시 교사 A는 교사지원활동에는 수업 및 생활지도 컨설팅, 연수 지원 및 강사활동, 자료개발 보급 및 연구 활동 및 학부모 대상 교육을 시행하고 있었다.

교사 A는 서울시 북부에 소재한 I중학교에서 3학년의 두 개 학급을 가르치고 있었고, 관찰한 수업은 그 중 한 개 학급으로 다양한 성취 수준의 학생들로 구성된 학급이었다. 연구에 참여한 학생 30명은 6명씩 5개 조로 자리를 배치하여 앉는다. 다음은 교실환경과 학생들의 자리배치를 나타내는 그림이다.

14) 이 연구는 서울대학교 생명윤리심의위원회로부터 승인을(IRB No. 1505/001-018) 받고 진행되었다.



[그림 Ⅳ-1] 한국 수석교사 A의 수학교실

수학교실 환경은 [그림 Ⅳ-1]과 같다. 교실의 기자재는 칠판과 모니터, 실물 화상기, PC로 교실 전방에 배치되어 있다. 교사와 학생은 칠판을 자주 사용하며, PC와 모니터는 교사가 개념의 원리를 설명하거나 도입할 때, 미리 준비해둔 수업자료를 전체 학생들에게 공유할 때, 자주 사용하였다. 그리고 실물화상기와 모니터는 학생들이 활동지에 직접 해결한 풀이를 보여줄 때 주로 활용하였다.

30명의 학생은 여섯 명씩 한 조로 총 다섯 개의 조로 나눠 앉는다. 책상위에 표시되어 있는 수는 학생들이 성취도 수준을 나타낸다. 1에 가까울수록 각 조에서 성적이 높은 학생이다. 이 자리 배치는 2학년 수학 성적을 반영하여 배치 된 것이고, 중간고사 기간 까지 그대로 유지된다. 학생들은 자신의 옆자리에 앉은 학생과 짝이 된다. 즉 각 조의 1번과 5번,

2번과 6번, 3번과 4번이 짝이다.

연구 데이터로서는 의미가 없지만, 이 학급에는 특수반 학생 1명이 종종 참여하였다. 그 학생은 30명과 같은 반 학생이지만, 지적 능력이 떨어져서 수학학습에는 참여하기 어려운 학생이었으나, 종종 수학 수업 시간에 3조에 자리를 추가하여 앉아 참여하기도 하였다.

이 교실에서 참여관찰 한 수업 내용은 다항식의 인수분해하기 이며, 다음은 총 9차시의 수업으로 진행되었다. 다음은 각 차시별 학습 내용을 정리한 표이다.

<표 Ⅳ-1> 한국 수석교사 교실의 수업 내용

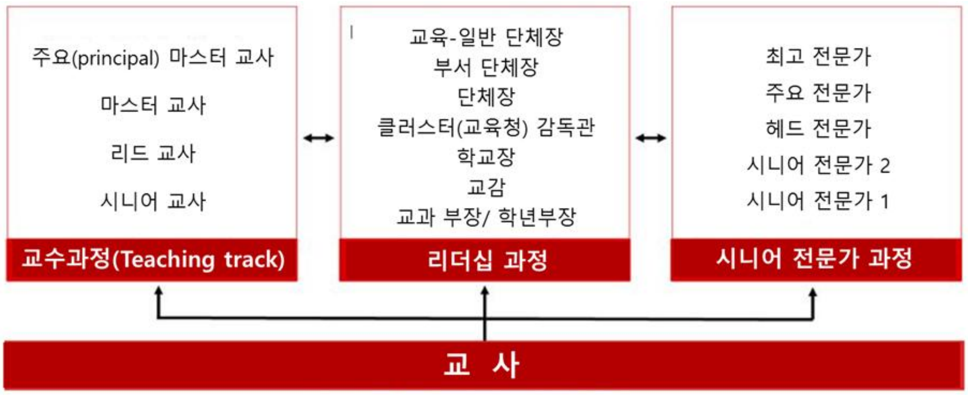
단원: 다항식의 인수분해	
수업	수업 내용
1차시	인수분해의 역사 그리고 인수분해를 학습하기 위해 필요한 용어 학습
2차시	공통인수로 인수분해 하기
3차시	완전제곱식으로 인수분해 하기_기초
4차시	완전제곱식으로 인수분해 하기_심화
5차시	합-차 공식을 이용하여 인수분해 하기
6차시	$x^2+(a+b)x+ab$꼴의 다항식 인수분해 하기
7차시	$acx^2+(ad+bc)x+bd$꼴의 다항식 인수분해 하기
8차시	수준별 다양한 인수분해 문제 해결 I
9차시	수준별 다양한 인수분해 문제 해결 II

이 교실은 2009개정 수학과 교육과정을 따른다. 이 학생들은 중학교 2학년 때 다항식의 곱셈과 나눗셈, 다항식의 곱셈공식, 그리고 미지수가 2개인 일차방정식과 연립방정식을 학습한 상태이다. 학교에서 선정한 교과서가 있기는 하지만, 수석교사 A는 이를 사용하지 않고, 학습 주제에 따라서 검인정된 수학교과서를 모두 참고하여, 수업 활동지를 만들었고, 학생들은 주로 그 활동지를 중심으로 학습하였다.

나. 싱가포르 리드교사 B와 수학교실 환경

싱가포르는 2001년부터 교사가 자신의 잠재력을 최대한 발휘할 수 있

도록 교육 서비스 전문성 발달 및 경력 계획 프로그램(Educative Service Professional Development and Career Plan)을 시행하였다. 특히, 교사는 세 가지 과정으로 구성된 과정으로 승진할 수 있고, 전문가 교사 과정은 교실에 남아서 전문가 교사를 희망하는 교사들이 취하는 진급 과정이라 할 수 있다.[15)]



[그림 Ⅳ-2] 싱가포르의 교사를 위한 다양한 경력 과정(MOE, 2015)

교사 승진을 위한 다양한 트랙 중에서, 교수 과정(teaching track) 이외에 리더십 과정(leadership track)은 교육부에서 학교의 행정적 업무를 희망하는 교사를 위한 것이다. 마지막으로 전문가 과정(specialist track)은 깊이 있는 전문가적 지식을 쌓기를 희망하는 사람을 위해 만들어졌다.

특히, 교실에 남아 교수를 수행하는 교수 과정(teaching track)에서 마스터 교사는 교육부에서 주 업무를 수행하고 있어 실제 학교 단위에서 수업을 하지 않으며, 학교에서 수업을 하는 교사로서 가장 높은 직책은 리드교사라 할 수 있다.

시니어 교사는 약 5명의 평교사마다 한 명씩 두어 신임 교사 연수, 평교사들의 상담 및 교수법 지도 등의 업무를 맡는다. 새 교육과정이나 기타 활동이 교내에 소개될 때 주도적인 역할을 하며, 학부모, 지역사회와

15) 한국의 수석교사제는 싱가포르에서 "교수 과정(teaching track)"과 유사한 개념이다.

학교의 관계를 조율하는 역할 등에 대해서도 단위 학교 내에서 책임 및 권한을 가진다. 리드교사는 2009년부터 신설된 직급이다. 리드 교사는 풍부한 주제 지식과 교수법을 통해 우수하며 협력적 전문성을 향상시키기 위한 교수 문화를 지원한다. 학교 지도자들과 협력하여 시니어 교사와 평교사들이 교과내용과 교육학, 그리고 평가 역량을 구축할 수 있게 도우며, 학교를 강력한 전문 학습 공동체로 발전시키는 역할을 한다. 또한 교과 전문성을 강화하기 위해 클러스터 내의 다른 학교의 교사들과 교과 전문 지식을 공유한다(MOE, 2015)

싱가포르의 리드교사를 모집하기 위해서 연구자는 싱가포르의 교사교육기관인 NIE(National Institute of Education)으로 2015년 4월부터 6개월간 방문하였다. 싱가포르 중등학교에서 수학교과를 담당하는 리드교사는 총 7명(2015년 기준)이었으며, NIE의 교수의 도움으로 싱가포르의 북부 중등학교의 리드교사 두 명의 수업을 참여관찰 할 수 있게 되었으며 그 중 한 명의 교사의 수업을 분석하였다.[16)]

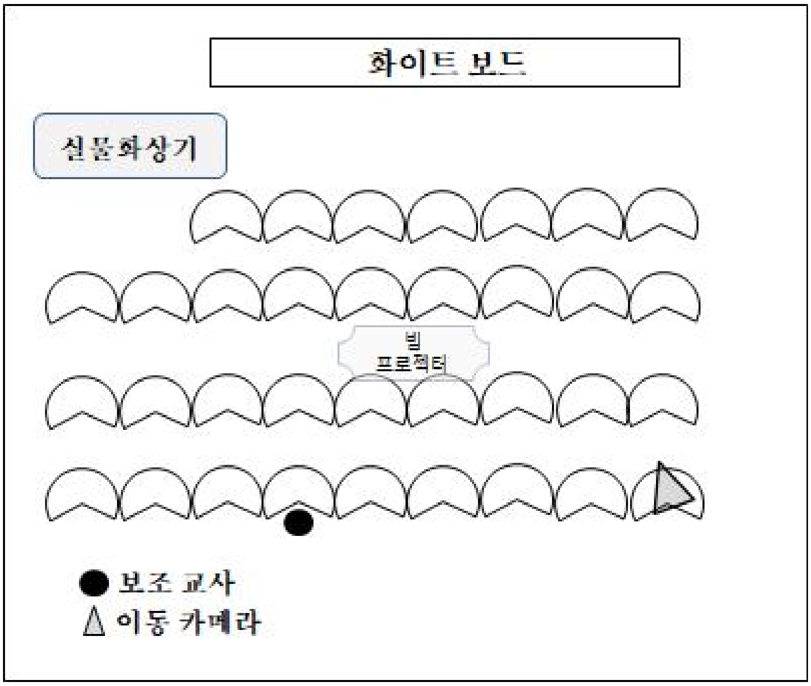
이 연구에 참여한 리드교사 B는 중국계 싱가포르인으로 교직 경력 20년차(2015년 기준)의 교사이다. 교사 B는 싱가포르의 북서부에 위치한 A중등학교에서 3, 4학년을 동시에 가르치고 있는 수학교사이다. 교사 B의 수업은 우수수업 사례로 선정되면서 2009년 대통령 표창을 받기도 했으며, 2014년 교육학 석사학위를 받으면서 싱가포르 교육부로부터 상(post- graduated scholarship)을 받기도 하였다. 교사 B는 싱가포르에서 우수한 수학교사로서 교사들을 멘토링하고, 신입 교사들을 지도하는 역할을 하고 있다.

이 연구의 참여자 싱가포르의 중등학교 리드교사 B와 그가 담당하는 3학년 학생 25명이다. 참관한 3학년 수업은 N(A)-level의 교육과정[17)]으

16) 이 연구는 서울대학교 생명윤리심의위원회로부터 승인을(IRB No. 1505/001-018) 받고 진행되었다. 분석에서 제외 된 리드교사의 수업은 수업 촬영 분에서 교사의 음성 및 학생의 음성 확인이 어려워 분석의 어려움이 있어 제외되었다.

17) 싱가포르 학생들은 초등학생 때의 성취 수준에 따라 중등학교를 진학하게 되는데, 학습 수준 및 향후 진학과 관련하여 단계를 엄격하게 구별하여 O-level, N(A)-level, N(T)-level 을 선택할 수 있도록 하고 있다. 이때, N(A)-level은 O-level의 내용을 학습하면, 사회과학 등에 관심이 있는 학생들이 취하는 H1 track으로 진학이 가능하다.

로 진행되고 있다. 학교는 수준별 수학 수업을 진행하고 있으며, 이 연구에서 관찰한 3학년 학생들은 수준별 수업에서 하위 반 학생들이었다. 초등학교 과정에서 수행 정도를 평가하는, 6학년에 실시하는 Primary Average of Primary School Leaving Examination (PSLE)의 점수로 보았을 때, A 중등학교에 입학하는 학생의 평균은 200점으로 싱가포르 내에서 매우 우수한 편에 속한다. 연구에 참여한 25명의 학생의 평균 PSLE 점수는 188~200점으로 이 학교에서는 비교적 낮은 수준에 속한다. 그러나 싱가포르 전역의 학생과 비교해 보았을 때, 중위권의 학생의 수준으로 볼 수 있다.



[그림 Ⅳ-3] 싱가포르 리드교사 수학교실

리드교사 B의 수업교실의 모습은 [그림 Ⅳ-3]과 같다. 25명의 학생들은 자신이 희망하는 자리에 앉았고, 앞쪽 3줄에 모든 학생들이 앉을 수 있었다. 또 싱가포르 수업에서는 보조교사 1명이 함께 수업을 참여하였

는데, 이 교사는 학생들이 제자리 학습을 할 때, 리드 교사와 함께 학생들의 질문을 받아 주거나 개별적으로 설명을 해주는 역할을 하였다. 교사는 주로 화이트보드에 판서를 하면서 학생들을 가르쳤으며, 실물 화상기를 사용하기도 하였다. 평면도형의 확대와 축소 관련하여, 평면도형을 실물 화상기에 올리고, 빔 프로젝트를 통해 화이트보드 위에 평면도형을 투영하는 식으로 기자재를 활용하였다.

교사 B는 수업 내용에 맞추어 매일 수업 활동지를 만들었으며, 특별히 사용하고 있는 교과서는 없었다. 이 교실에서의 수업 내용 삼각형의 합동과 닮음을 주제 6차시의 수업 내용은 다음과 같다.

<표 Ⅳ-2> 싱가포르 리드교사 교실의 수업 내용

단원: 합동과 닮음	
수업	수업 내용
1차시	두 삼각형이 합동인지 아닌지 판별하기
2차시	두 삼각형이 닮음인지 아닌지 판별하기
3차시	도형에서 닮음인 삼각형 찾기 그리고 닮음을 이용한 문제해결하기
4차시	닮음 평면도형과 입체도형의 넓이 비와 부피 비 탐구하기
5차시	평면도형에서 닮음을 이용한 문제해결하기
6차시	입체도형에서 닮음을 이용한 문제해결하기

이 교실의 학생들은 N(A)-level의 교육과정을 따르는데, 학생들은 중등학교 2학년 과정에서 합동인 도형과 닮은 도형을 학습하였다. 참여 관찰한 중학교 3학년 과정에서는 합동과 닮음 조건 및 닮음도형의 성질을 학습하는 나선형 교육과정을 아래서 수업이 진행된다. 특히, 싱가포르 수업 사례에서 진행된 4, 5, 6차시 수업 내용은 한국의 경우에는 2015개정 수학과 교육과정에서는 삭제된 내용들 이다.

두 연구 참여자들은 그 나라의 계층, 지위, 성별, 세대, 경력, 출신 배경 등의 제 측면에서 그 나라의 교사와 학생들의 전형은 온전히 재현하지는 못한다. 따라서 이 연구에서 분석하고 논의할 교실수업의 문화는 분석된 사업 사례 이외의 한국의 수학수업과 싱가포르의 수학수업을 전

적으로 대표하는 것은 아니다. 따라서 이 연구 결과가 특정한 상황적 맥락 하에서 비롯되었음을 염두에 두어야 한다. 그러나 이러한 표본 추출의 제한에도 불구하고, 이 연구는 두 나라의 교실 수업의 문화적 특성을 해석적으로 연구하는 사례로서 기여할 수 있을 것이라 기대한다.

2. 연구 방법 및 절차

교실 수업의 참여관찰 기간은 다음과 같다. 싱가포르 리드교사의 교실 수업을 참여 관찰하기 위하여 연구자는 2015년 5월부터 약 6개월 동안 싱가포르에 체류하였고, 2015년 7월 중순부터 약 3주에 걸쳐 A학교를 방문하고, 중등학교 3학년 학생의 6차시의 연속적인 수업을 관찰하였다. 6차시의 수업 내용은 도형의 합동과 닮음을 주제로 하였다.

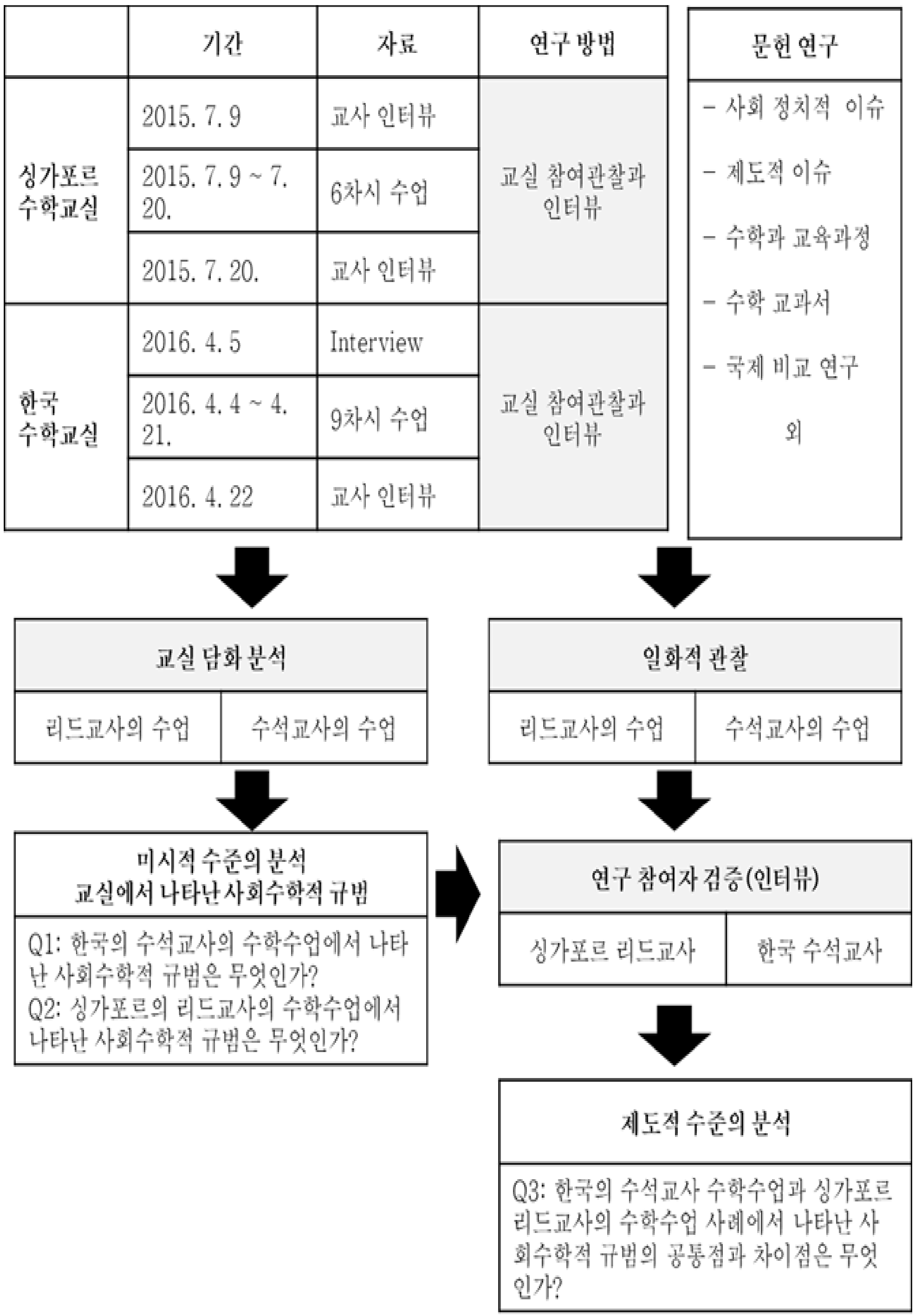
한국 수석교사의 교실 수업을 참여 관찰하기 위해서 연구자는 2016년 4월 초부터 약 3주간 I학교를 방문하고, 중학교 3학년 9차시의 연속적인 수업을 관찰하였다. 9차시의 수업 내용은 다항식의 인수분해이다.

각 나라에서 관찰한 수학수업은 연구 일정에 따라 그 당시 교사 A와 B가 수행하는 수업을 참관하였기 때문에, 수업 내용에는 차이가 있다. 이 연구에서는 수학교실의 미시적 교실문화의 특성으로 사회수학적규범에 초점을 맞추고 있기 때문에 교실의 수업주제가 차이가 있다는 것은 큰 문제가 되지 않는다. 왜냐하면, 사회수학적규범은 수업내용이나 주제에 영향을 받는 것이 아니라, 교실 안에서의 교사와 학생들 그리고 학생들 간에 발생하는 상호작용의 특성을 설명하는 것이기 때문이다. 수학교실문화를 분석하기 위한 이론적 관점을 기술하면서 서술한 바와 같이, Cobb(1996)은 사회수학적규범이 수학교실에서 나타나는 독특한 특성이지만 그것이 학습 주제와 관련하여 차이가 있다고 설명하지 않았다. 미시적 교실문화에서 수학교과의 학습 주제에 따라 차이가 발생하는 것은 그들이 제안한 해석적인 틀에서 수학적 관행에 해당하는 것으로 수학적

정당화과 탐구에 영향을 미치는 문화적 도구로 보았다.

일상적인 수학수업을 사례로 하면서도, 수학수업의 문화적 현상을 해석하기 위해서는 한 학습주제를 가지고 그 주제를 도입하고 마무리하는 연속적인 수업을 분석할 필요가 있었다. 이 연구는 LPS와 비슷한 방법으로 수학교실의 수업 데이터를 모았다. 다시 말하면, LPS 이전에 진행된 국제 수학교실 비교 연구인 TIMSS 비디오 연구에서는 여러 명(약 100여명)의 교사의 단일 수업을 모아서 그 수업들의 문화적 특성을 찾았다면, LPS에서는 각 나라의 소수의 참여 교사(3인)의 연속적인 10차시의 수학 수업을 분석한 것이다. LPS 연구에서도 지적한 바와 같이 수업은 이전 수업과 다음 수업 사이의 연속적인 흐름 안에서 현재의 수업이 진행되는 것이기 때문에, 이 연구에서도 연속적인 수업을 관찰하기로 하였다. 또한 한 교실의 문화적 특성이 지속적으로 유지 관찰 되는지는 살펴볼 필요가 있기 때문에 한 교사의 연속적인 수업을 관찰하는 것이 더 적합하였다. 연구방법의 구체적인 과정과 절차는 [그림 Ⅳ-3]과 같다.

사회수학적규범에 관한 선행연구에서는 여러 연구자들마다 여러 범주를 발견하였으나, 이미 밝혀진 것 이외의 다른 사회적 상호작용을 발견하기 위해서 본 연구자는 그것으로부터 틀을 만들어 관찰하지 않고, 개방적 관찰방법을 진행하였다. 또한 각 나라의 거시적인 사회현상과 수학교실의 문화적 현상을 해석하기 위해서 개방적 관찰방법을 진행하였다. 연구자가 교실에 들어가기 이전에 어떤 특정 분석 체계나 이론적 가정을 현상의 기술에 적용하여 객관화시키기 보다는 연구대상이 되는 사건이나 문화를 있는 그대로 수용하고 관찰하고 재현하려고 하였다. 개방적 관찰방법은 연구 초기에 많이 쓰이는 관찰 방법으로, 연구자가 연구의 주제를 찾기 위해 또는 보다 세부적인 연구주제나 사건들을 규명하기 위하여 일차적으로 현장에서 일어난 모든 사건과 현상들을 관찰일지를 통해 빠짐없이 기술하는 관찰방법이다. 이 연구 방법은 교실 수업의 문화나 삶을 전체적으로 관찰하고 그려낼 수 있는 장점이 있다(김영천, 2007). 따라서 개방적 관찰은 수업을 관찰하는 동안(2015년 7월과 2016년 4월)에 주로 사용되었다.



[그림 Ⅳ-4] 연구 방법 및 절차

먼저 각 나라에서 진행하는 일상적인 수학수업에 관찰자로서 참여관찰 한다. 수업 안에서 일어나는 교실의 문화적 현상을 탐색하고자 함을 교사와 학생들에게 연구의 목적을 알리고, 평소 수학수업과 같이 교수하고 학습하기를 기대하였다. 교실이라는 공간에 연구자가 있기는 하지만 학생들과 적극적으로 상호작용하거나 참여하지는 않았다. 연구자는 교실의 미시적인 문화의 특성으로 사회수학적규범이라는 주제에 관심을 두었고, 수업에 참여관찰이 진행되기 전, 후 수학 지식에 대한 본성 및 교수 학습 방법에 대한 교사의 신념을 탐색하기 위한 면담을 실시하였다. 또한 수업의 개별 사건에 대하여 교사의 행위의 의미와 동기를 묻는 인터뷰를 진행하였다. 인터뷰는 연구자가 수업에서 생긴 의문이나 촬영한 수업을 보면서 교사의 행동의 의미를 이해할 필요가 있다고 판단되는 때, 연구자의 요청에 의해 진행되었다. 교사와의 인터뷰는 사전, 사후를 포함하여 5차례 진행되었고, 각 인터뷰는 10분 내외로 진행되었다.

수업을 참여관찰 한 이후, 담화분석에서 사용하는 상호작용의 규칙들을 사용하여 교실담화를 미시적으로 분석하였다. 여기서 미시적 관찰 방법은 교실에서의 질서, 관리, 그리고 수업에서 언어를 통하여 어떻게 구성되고 변화되는지를 연구하는 것이다. 교실의 대화의 미세한 부분만 연구주제로 삼아 참여자들의 상호작용을 녹화 녹음하여 각 문장들을 전사한 교실 담화를 분석한다. 특히, 담화를 통해 나타나는 상호작용과 실제적 행동을 탐색한다. 이 과정을 통해 교사와 학생들의 담화의 특성을 발견하고, 담화 안에 내포된 의미를 파악하고자 하였다. 자료를 분석하는 과정은 일정비교 분석과정으로 진행되었다.

마지막으로 수학교실의 문화적 현상을 교실 밖의 제도적 현상과 연결하여 해석하기 위해서는 일화적 관찰 방법을 가지고 특정한 주제만을 선별하여 관찰하는 방법으로, 연구자가 관찰하려고 하는 대상들(특정한 담화, 사건, 연구주제) 등을 미리 결정한 다음, 관찰일지와 녹화된 수업을 반복적으로 관찰하면서 그러한 대상들에 집중적으로 관찰하고 기록하였다. 또한 사례를 비교 분석과정에서 연구 참여자 검증 인터뷰를 진행하여 연구자의 해석에 대한 검증 과정을 거쳤다. 이 인터뷰는 2017년 7월

에 진행되었으며, 한국의 수석교사는 1시간 가량 반구조화된 인터뷰로 진행되었고, 싱가포르 리드교사는 서면 인터뷰를 진행하였다.

3. 자료의 수집과 분석

교실 수업 관찰일지와 캠코더를 통해 주요 연구참여자들의 수업 장면과 교실담화를 즉시적으로 기록하였다. 한국 교실의 데이터를 수집하기하기 위하여, 캠코더는 교실수업에 참여하는 학생들의 미세한 움직임과 비언어적 측면들을 세밀히 담아내기 위해, 교실의 우측 후방과 전방에 설치되었고, 보다 세밀한 관찰이 필요할 경우, 교사와 학생들에게 방해가 되지 않는 범위에서 이동식 카메라를 통해 관찰의 위치를 변경하여 수업을 녹화 하였다.[18] 캠코더를 통해 녹화된 수업은 각각 45분 전후의 15차시 분량으로, 총 약 700분 정도 이다.

수업의 참여관찰하기 전, 후 인터뷰를 진행하였는데, 인터뷰는 수학교수학습의 목적은 무엇이라 생각하는지, 수업을 준비하는 과정에서 어떤 자료를 가장 많이 활용 하는지, 수학을 교수과정에서 교사로서 중요하게 생각하는 것은 무엇인지에 대해 물었다. 수업을 참여 관찰하는 동안 진행된 인터뷰는 수업 활동에서 교사의 행동의 의미를 파악하기 위해서 수업 직후 또는 며칠 후 지난 수업의 사건에 대해 질문하였다. 예를 들어, 왜 학생들의 풀이 중에서 그 학생의 풀이를 전체학생과 함께 공유하기로 생각하였는지, 즉 왜 특정 학생을 발표자로 선정하게 되었는지, 학생들의 발산적인 사고를 수업 시간에 왜 수용하였는지 또는 왜 수용하지 않았는지 등에 대하여 물었다.

교실의 미시적인 문화적 특성으로 사회수학적규범에 초점을 맞추어, 교실내에서 일어나는 담화 분석이 이루어 졌다. 먼저 촬영된 수업은 모

18) 이러한 데이터 수집이 가능한 교실은 한국 수학 교실의 사례를 설명하는 것이며, 싱가포르에서는 촬영도구의 기자재 확충이 어려워 이동식 카메라 한 대로만 수업을 촬영하였으며, 교사를 활동에 집중하여 촬영 되었다.

두 전사 하였다. 최대한 누락하지 않고 전체 내용을 기록하였으며, 화자가 말하는 한 문장마다 번호를 부여하여 사건의 발생 순간을 찾고자 하였다.

교실 담화 안에서 사회수학적 규범으로 해석 가능한 시점과 끝나는 시점을 표시하였다. 1차 코딩은 수학교실에서 특수하게 나타나는 상호작용의 특성이 행동적으로 나타나는 순간을 체크하여, 그것이 어떠한 사회수학적 규범으로 규정할 수 있을 것인지 해석하였고, 임시적 범주체계를 만들었다. 임시적 범주체계에 따라 다시 교실 수업 자료들이 반복적으로 검토되었다. 2차 코딩은 종전에 범주화된 체계(1차 코딩)에서 새롭게 삭제되거나 추가됨으로써 새로운 범주체계로 변화되었다. 그리고 1차 코딩과 동일한 방법으로 사회수학적 규범의 특징이 나타나는 순간을 표시하였으며, 분석과정에서 지속적으로 수정 변경 되었다. 최종적으로 범주화된 사회수학적 규범은 총 8개이며, <표 Ⅳ-3>과 같다.

한국과 싱가포르의 수학수업 사례에서 나타난 사회수학적 규범 중 무엇이 수학적 설명으로 받아들여질 만한지, 무엇이 수학적으로 다른 해결방법인지, 무엇이 쉽고 어려운지, 무엇이 효율적인지, 무엇인 수학적으로 통찰력 있는 방법인지는 이미 선행연구를 통해 밝혀진 바가 있는 것들이다(Cobb & Yackel, 1996; Browers, Cobb, & McClain, 1999; McClain & Cobb, 2001; 방정숙, 2006; Levenson, Tirosh, & Tsamir, 2009를 보라). 그러나 두 나라의 수업에서 보여준 사회수학적 규범은 그동안 연구에서는 논의되지 않았던 것들도 나타났다. 예를 들면, 무엇이 수학적으로 받아들여질 만한 개념이 인가, 어떻게 수학적 문제해결 전략을 세울 것인지에 대한 규범이 그에 해당한다.

<표 Ⅳ-3> 사회수학적 규범과 설명

사회수학적 규범	설명
문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범	문제해결 과정 및 증명을 전개하며 수학적 아이디어를 어떻게 표현하는 것이 더 적절한 지에 대해 논의하거거나 설명하는 경우
문제해결을 위해 어떻게 전략을 세울 것인지에 대한 규범	문제해결 전략을 구상하기 위한 메타인지, 발견술, 문제해결 단계 등에 대해 논의하거나 설명하는 경우
수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범	수학적 해법을 설명하거나 발표할 때, 청자가 이를 수용하기 위해 설명이 갖춰야 할 요건이나 특징에 대해 언급하거나, 교실에서 기대되는 수학적 의사소통하는 방법에 대해 논의하거나 설명하는 경우
무엇이 수학적으로 다른 아이디어로 여겨지는 지에 대한 규범	특정한 수학적 아이디어와 풀이 절차를 다른 수학적 아이디어와 비교하며 그 차이와 특징 등을 논의하거나 설명하는 경우
무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대한 규범	더 효율적인 문제해결 방법이나 증명 방법 등에 대해 논의하거나 설명하는 경우
수학교실에서 논의 될 만한 내용이 무엇인지에 대한 규범	풀이나 설명의 논리 등을 떠나 수학적 내용만을 주목하였을 때 적법하게 수학 교실에서 다루어질 수 있는 내용과 배제되는 내용은 무엇인지에 대한 논의가 진행되는 경우
어떤 문제가 더 좋은 문제인지에 대한 규범	수업 중 다루어지는 문제나 학생들에 의해 만들어진 문제가 어떤 의미에서 수학적으로 긍정적인가를 판단하거나 설명하는 경우
수학적 표현을 어떻게 쓰는 것이 좋은지에 대한 규범	수학적 표현의 논리적 적합성이 아니라 의사소통의 효율성을 높일 수 있는 표현 방법이나 수학적으로 더 통용되는 표현에 대해 논의하거나 설명하는 경우

사회수학적 규범은 <표 Ⅳ-3>의 코딩범주에 따라 다음과 같이 코딩되었고 분석되었다. 다음의 예는 한국 수학교실에서 “무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대한 규범”과 “수학적으로 의사소통 하는 방법에 대한 규범”으로 동시에 코딩된 담화의 예이다. 수석교사의 수업에 참여한 학생의 경우, 학생 조와 조 번호를 이용하여, n조(m)으로 표시하였으며, 이는 n조의 m번 학생의 의미한다.

<표 Ⅳ-4> 코딩의 예

수업 차시: 3차시
내용: 에피소드 4 짝과 함께 인수분해 문제를 칠판에 풀기
과제: $(x-1)(x-2)+(x+3)(x-1)$ 을 인수 분해 하여라.

	화자	담화	행동	사회수학적 규범
70	선생님	여기 보완할 것이 있다.		수학적으로 수용가능한 설명과 설명방법에 대한 규범
71		틀린 것이 있다	2조(3)이 손을 든다.	
72		어 아들!		
73	2조(3)	어 허희연꺼 랑 첫 번째 꺼 랑		
74	학생들	(소란스럽게)왜에		무엇이 수학적으로 더 효율적인가에 대한 규범
75	선생님	첫 번째 거 어느 부분이?		
76	2조(3)	일단 저렇게 하면은 굉장히 실수가 많습니다.		
(조금 소란해진 학급을 집중시키기 위해 칠판 왼쪽에 달린 벨을 울린다)				
77		지워도 될까요?	칠판으로 간다.	수학적으로 수용가능한 설명과 설명방법에 대한 규범
78	선생님	안되지.		
79	3조(1)	안된데		
80	2조(3)	이렇게 마구잡이로 하지 않고, 고치겠습니다.		무엇이 수학적으로 더 효율적인가에 대한 규범
81		A B C A 그러면은 더 깔끔하죠?	AB+CA를 쓴다	
82		그럼 A B		
83	학생들	(음성 겹침)아 그럼 똑같잖아.		
84	2조(3)	아이 들어봐!		
85		이렇게 해서 A를 뺍니다.	A(B+C) $(x-1)$ $(x-2+2+3)$ 을 쓴다	
86		여긴 B 여긴 C 이런 형태가 되죠?		
87		이걸 치환이라 합니다.		
88		-1 하고 B+C 이니까 -2		
89	3조(1)	그렇게 하면 풀이가 길어지잖아.		
90	2조(3)	이렇게(치환하지 않고)하면 감점돼요.		
91	2조(2)	(소란스럽게) x가 아니잖아.		
92	1조(1)	넌 아예 틀렸어. (웃음)		

첫 번째, 수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범으로 코딩된 경우는 친구들의 풀이에서 그것을 보완하는 설명하기를 요구하고 있기 때문에 코딩 되었다. 두 번째 이 규범으로 코딩된 경우도 그 맥락을 같이한다. 동료의 풀이를 지우지 않고, 그것의 한계와 자신의 제안을 동시에 설명해야 해야 한다는 규범을 만들어 가고 있는 상황으로 해석할 수 있기 때문이다.

그리고 무엇이 더 수학적으로 효율적인가에 대한 규범과 관련하여, 2조(3)학생은 칠판의 동료의 풀이는 담화 76 그리고 80과 같이 “실수하기 쉬운 풀이”, 또는 “마구잡이” 식 풀이라고 해석하고 있음을 보여 존다. 그 이후 89번의 담화는 새로운 제안이 풀이는 간결하게 만들고 있지는 않음을 나타내고 있다. 따라서 이 담화들이 일어나게 하는 무엇이 수학적으로 더 효율적인가에 대한 규범으로 코딩 되었다.

어떤 사회수학적 규범이 발생한 것으로 코딩할 때, 그것이 발생한 시작과 끝을 분명히 하기는 쉽지 않은 일이었다. 위의 예처럼 어떻게 수학적으로 의사소통 할 것인지를 나타내는 담화 70~73은 담화 77~79 사이에는 새로운 사회수학적 규범이 발생하고 있지만, 두 담화는 서로 맥락상 연결되어 있어 70과 77번의 대화가 수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범이 발생하기 시작한 순간이고 73과 79번의 끝난 순간이라고 설명하기 어렵다.

다만 해석되는 사회수학적 규범이 한 활동 안에서 시작하고 마무리 된다는 공통된 특징을 확인할 수 있었다. 예를 들어, 위의 담화들은 모두 짝과 함께 인수분해 문제를 칠판에 풀기라는 활동 안에서 발생한 것이라는 점이다. 따라서 그 활동을 분석의 단위로 두었으며, 그것을 에피소드라 불렀다. 다시 말해 에피소드는 교사의 새로운 의도가 보일 때, 시작되며, 그 의도가 완성되면 마무리 되는 수업 활동과도 밀접하게 연관이 된다. 예를 들어, 교실에서 특정한 수학적 성질을 조사하는 것으로 시작할 수 있고, 그 성질에 대한 탐구가 마무리 되었을 때, 다음의 에피소드로 넘어가게 된다. 다음의 표는 연구자가 에피소드로 분류한 것이 무엇인지를 명확하게 보여주기 위해서 한국과 싱가포르의 1차시 수업에서 나타나

난 에피소드를 제시한다. 특히 싱가포르 수업 분석을 위해서는 에피소드별로 연구자에 의해 분석된 교사의 의도가 맞는지 B교사에게 검토를 요청 하였고, 의견을 반영하여 최종적으로 분석의 단위를 설정하였다.

<표 Ⅳ-5> 한국 수석교사 수업의 1차시 에피소드

1차시	인수분해의 역사 그리고 인수분해를 학습하기 위해 필요한 용어 학습
에피소드	1. 학급정렬
	2. 이전 차시 학습한 무리수 내용 정리 및 π의 소수점 1000자리까지 외우기
	3. 인수분해를 위한 수학 용어알기: 다항식, 전개, 분배법칙, 곱셈공식, 인수, 공통인수, 완전 제곱식, 인수분해
	4. 학습한 용어가 답이 되게 질문 만들기
	5. 영상자료를 보고 학습주제와 관련된 문제 만들기
	6. 에피소드 5에서 학생들이 만든 문제 해결
	7. 다음 차시 안내

<표 Ⅳ-6> 싱가포르 리드교사 수업의 1차시 에피소드

1차시	두 삼각형이 합동인지 아닌지 판별하기
에피소드	1. 삼각형의 합동조건 정리하기
	2. SAS조건을 사용하여, 두 삼각형이 합동임을 보이기, 조건을 어떻게 쓸 것인지 보여주기
	3. 개별학습하기 그리고 교사에 의해 선택된 두 학생이 칠판에 합동조건을 사용하는 문제를 해결하기
	4. 학생의 풀이를 교사가 설명하기
	5. 합동조건과 닮은 조건을 비교하기

한 에피소드 안에서 하나의 사회수학적 규범만 나타나는 것은 아니었으며, 또 모든 에피소드에서 특정한 사회수학적 규범이 나타나는 것도 아니었다. 한 에피소드 안에서 나타나는 특정한 사회수학적 규범이 해석가능한 순간이 여러 번 보이더라도 그 시작이 그 에피소드 활동 자체에 영향을 받기 때문에 에피소드 안에서 빈도를 분석하는 것은 의미가 없었다. 즉, 한 에피소드 안에서는 어떤 사회수학적 규범이 나타났는지 나타나지 않았는지 만을 알 수 있을 뿐 그 안에서 특정한 사회수학적 규범이 몇 번이 나타났는지를 명확히 하기 어렵다. 따라서 각각의 사회수학적규

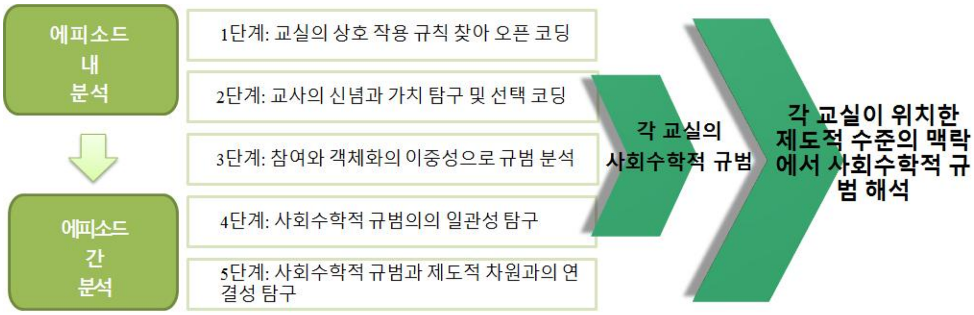
범의 분석의 단위는 에피소드가 된다. 위의 코딩 샘플을 바탕으로 다시 설명하면, 3차시의 에피소드 4에서는 “무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대한 규범”과 “수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범”이 나타났다. 그 해석을 가능하게 한 여러 차례의 담화들이 분절적으로 있음을 확인할 수 있다. 그것을 하나씩 빈도로 체크하지 않으며, 두 규범이 3차시 4번째 에피소드에서 나타난 것으로 빈도를 분석하였다. 따라서 각각의 사회수학적 규범의 빈도수는 전체 수업의 에피소드의 수를 넘지 못한다.

하나의 에피소드 내에서 발생한 사회수학적 규범을 실천공동체 관점에서 참여와 객체화와 의미협상의 과정으로 분석해 보면서 규범의 형성과정을 좀 더 세밀하게 탐색하였다. 이는 각 나라에서 동일한 사회수학적 규범이 발생하더라도 그 안에서의 공통점과 차이점을 좀 더 세밀하게 탐색 할 수 있게 하였다.

각 나라의 수학교실의 문화적 특성을 해석하기 위해서여, 교실의 담화와 그밖에 교실 수업에서 발생한 담화의 전후맥락을 심층적으로 파악하기 위해 교육활동 계획서와 각종 문서자료, 교사용 지도서, 교수학습 지도안, 활동지 및 교과서 등을 추가적으로 활용하였다. 질적 연구 방법의 특성상 자료수집과 분석 그리고 해석의 작업이 동시에 순환적으로 발생한다. 즉, 자료수집과 자료 분석의 순환성은 자료수집 단계와 자료 분석 단계가 일직선상의 전후 관계가 이는 것이 아니라, 순환적 관계를 나타내면서 진행됨을 의미한다(김영천, 2007). 자료 분석과 해석의 과정도 동일한 순환적 특성을 지닌다. 따라서 위와 같은 질적 연구의 특성에 따라, 자료수집과 분석 그리고 해석의 과정에서 연구자만의 ‘자료 분석 및 해석 노트’가 작성되었다. 연구과정에서 수집된 각종 자료들과 ‘자료 분석 및 해석 노트’의 내용들을 이론적으로 뒷받침하기 위하여 국내외 관련 문헌들을 지속적으로 검토하였다. 추가적인 문헌연구로부터 얻어진 중요한 아이디어를 메모했다.

수집된 자료의 분석과 해석 작업은 다음과 같은 방법으로 이루어 졌다. 녹화된 교실 수업의 자료들을 반복적으로 시청하고, 교실 수업 관찰

일지를 검토함으로써 다양한 수업상황에 따른 교실수업의 문화적 특징을 살펴보았다. 그리고 연구주제와 간련하여 반복적으로 나타나는 교실 수업의 문화적 특성을 구분하여 1차 코딩(범주화)를 완료하였다. 그리고 1차 코딩에서 만들어진 임시적 범주체계에 따라 다시 교실 수업 자료들을 반복적으로 검토함으로써 2차 코딩 작업을 준비하였다. 2차 코딩 작업은 녹화된 교실 수업 자료 뿐 만 아니라 인터뷰 자교 교실 수업 관찰일지, 기타 보조 자료를 통해 재분석 되었다. 연구주제와 관련된 중요한 사건을 표시하였다.



[그림 Ⅳ-5] 에피소드 분석 과정

학급의 교실 규범에 대한 에피소드 내 분석은 다음 두 단계로 진행하였다. 먼저 에피소드 속에서 나타나는 명시적인 규칙이나 특징적인 현상들을 추출하였고, 그 다음 그 규칙들이 교사가 가진 가치와 신념에 어떻게 영향을 받았는지 해석하였다. 에피소드 내 분석으로 추론한 규칙들이 교실의 규범으로서 지속적으로 공유하게 되는 실천으로 나타나는지를 확인하기 위하여 에피소드 간 분석을 실시하였으며, 실천 공동체의 참여와 객체화 과정을 분석하여 교실 규범과 규범의 형성과정을 탐색하였다.

4. 연구의 타당도와 신뢰도

분석 과정에서 자료 분석의 신뢰도와 타당도를 확보하기 위해, 교사 면담 내용과 실제 수업에서의 탐구 활동 모습, 학생들의 면담 및 활동 자료와 같은 다양한 출처의 자료들에서 공통적으로 발견되는 내용을 중심으로 데이터 삼각검증을 하였다.

<표 Ⅳ-7> 수석교사의 수업과 리드교사의 수업에서 나타난 사회수학적 규범

사회수학적 규범	수석교사 수업									리드교사 수업					
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
수학적으로 수용 가능한 설명에 대한 규범	●	○	○	○	○	○	○			●	○				○
문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범			●	○				○	○	●	○			○	
수학적 표현을 어떻게 쓰는 것이 좋은지에 대한 규범			●		○						●				
수학적으로 다른 아이디어에 대한 규범			●	○			○			●	○				
무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대한 규범			●	○		○	○		○	●					
문제해결을 위해 어떻게 전략을 세울 것인지에 대한 규범										●	○	○	○		
무엇이 수학교실에서 논의 될 만한 내용인지에 대한 규범			●	○											
어떤 문제가 더 좋은 문제인지에 대한 규범	●			○	○										
전체 에피소드	7	10	9	11	19	12	14	10	10	5	12	6	8	5	7

* 각 사회수학적 규범이 가장 처음 나타나는 수업 차시에는 "●"로 표시함.

각 나라의 수학수업에서 나타나는 사회수학적 규범을 두 번에 코딩과정을 거쳐서 최종적으로 산출되었다. 연구자가 해석한 사회수학적 규범이 그것으로 충분한 지 등에 대한 문제가 발생할 수 있다. 개발된 사회수학적 규범의 분석틀은 일정비교 연구 방법을 통해 지속적으로 분석되었는데, 매 수업 사례에서 나타나는 사회수학적 규범은 다음과 같이 나타났다.

수업 차시가 누적됨에 따라 새롭게 등장하는 사회수학적 규범은 줄어들었고, 한국 수석교사의 수업의 경우는 모든 사회수학적 규범은 수업의 3차시 안에서 모두 나타났고, 싱가포르의 리드교사의 수업에서는 2차시 안에 모두 나타났다. 따라서 이 연구에서 연구자가 사회수학적 규범의 분석틀로 제안한 것은 두 나라의 수학교실에서 나타난 사회수학적 규범을 모두 해석한 것으로 판단할 수 있다.

연구계획과 자료의 분석 및 해석의 타당성에 대하여 교실수업 분석과 교실 담화 분석에 관심을 두고 있는 연구자들(2인)에게 수차례 조언을 받았고, 연구 수행 과정에서 발생될 수 있는 방법론적, 분석적, 해석적 오류와 글의 타당성의 이슈들을 지적해 주었으며, 연구 주제와 관련하여 새로운 관점과 아이디어를 제공해 주었다.

또한 평가자간 신뢰도 확보를 위해 2명의 질적연구자에게 제공된 사회수학적 규범의 설명과 분석에 동의 여부를 물었다. 평가자 A와 B는 모두 수학교육 전공자로 박사를 수료를 하였으며, 석사학위 논문으로 질적연구를 하였으며, 현재까지 질적 연구에 관심을 가진 연구자 들이다. 또한 이 두 평가자는 연구자의 연구를 충분히 이해하고 있으며, 지속적으로 이 연구의 취지에 따라 함께 논의를 해 온 동료로서 사회수학적 규범에 대한 이론적 관점을 공유하고 있는 연구자이다.

평가자 A와 B, 그리고 연구자와의 코딩 결과의 약 90% 일치도를 보였으며, 차이가 나는 에피소드에 대해서는 연구자와 평가자 간의 지속적인 논의를 통하여 최종적으로 코딩의 합의에 이르렀다.

이 연구는 수집된 자료의 분석과 해석의 과정에서 발생하는 연구자의 편견과 오류를 최소화하기 위하여, 수학교실의 문화적 특징을 분석한 결

과의 해석에 대해 왜곡된 바가 없는지를 검정하였다. 연구 참여자의 검증 과정을 거치기 위해 연구 결과를 공유하고 각 교실에 나타나는 교실 문화의 특성에 대하여 인터뷰를 진행하였다.

<표 Ⅳ-8> 평가자간 일치도 결과

사회수학적 규범	연구자	평가자 A	평가자 B
수학적으로 수용 가능한 설명에 대한 규범	20	18	17
문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범	9	8	9
수학적 표현을 어떻게 쓰는 것이 좋은지에 대한 규범	3	3	3
수학적으로 다른 아이디어에 대한 규범	7	6	6
무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대한 규범	9	9	9
문제해결을 위해 어떻게 전략을 세울 것인지에 대한 규범	11	10	11
무엇이 수학교실에서 논의 될 만한 내용인지에 대한 규범	2	2	0
어떤 문제가 더 좋은 문제인지에 대한 규범	3	2	3
계	64	58 (90.63%)	58 (90.63%)

이 연구는 질적 연구를 통하여 교실 수업의 문화적 특성을 교실 안의 담화분석과 교실 밖의 상황과 상호관련지어 해석적으로 탐구하고자 하였다. 미시적인 수업현상을 교실 밖의 현상과 유기적으로 연결하는 작업은 쉬운 일이 아니었다. 미시적인 수업 현상을 사회문화적, 제도적, 맥락과 연결시키는 작업은 때로는 논리적 비약을 야기하기도 하였다. 수업 현상을 분석하는 작업은 수집된 연구 자료에 근거하여 이루어졌다. 그러나 분석의 단계를 넘어 연구 자료들을 해석하는 일은 연구자의 새로운 통찰과 이론이 절대적으로 필요하였다. 일부의 해석들은 수차례의 논문심사 과정을 통해 새롭게 수정되거나 삭제되었다.

V. 수석교사와 리드교사의 수업사례에서 나타난 사회수학적 규범

이 장은 한국의 수석교사와 싱가포르의 리드교사의 수학 수업 사례에서 나타난 사회수학적 규범이 무엇이며, 그것이 실천공동체의 관점에서 어떻게 나타나는지 분석한다. 그리고 두 교사의 수업사례에서 나타난 사회수학적 규범의 공통점과 차이는 무엇인지를 분석한다.

1. 한국 수석교사의 수업에서 나타난 사회수학적 규범

한국의 수석교사의 교실의 총 9차시의 수업동안 발현된 사회수학적 규범은 총 7개로 분석되었다. 그것은 '수학적으로 수용 가능한 설명에 대한 규범'. '문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범', '무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대한 규범', '수학적으로 다른 아이디어에 대한 규범', '수학적 표현을 어떻게 쓰는 것이 좋은지에 대한 규범', '어떤 문제가 더 좋은 문제인지에 대한 규범', 그리고 '무엇이 수학교실에서 논의 될 만한 내용인지에 대한 규범'에 대한 규범이다.

그 중에서 '수학적으로 수용가능 한 설명에 대한 규범', '무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대한 규범'은 전체의 약 50%를 차지하는 것으로 가장 많이 등장하는 사회수학적 규범으로 분석되었으며, 수석교사의 수업에서만 나타나는 사회수학적 규범으로 '무엇이 수학교실에서 논의될 만한 내용인지에 대한 규범' 그리고 '어떤 문제가 더 좋은 문제인지에 대한 규범'으로 나타났다.

가. 수학적으로 수용 가능 한 설명과 설명 방법에 대한 규범

수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범은 수학적 해법을 설명하거나 발표 할 때, 청자가 이를 수용하기 위해 설명이 갖춰야 할 요건이나 특징에 대해 언급하거나 교실에서 기대되는 수학적 의사소통 방법에 대해 논의하거나 설명하는 경우 코딩되었다. 한국 수석교사의 수업에서 총 13번의 에피소드 안에서 발현되었다. 한국 수학교실에서 사회수학적 규범 중에 약 36.11%라는 가장 높은 비중을 차지한다. 13번의 에피소드는 다음과 같이 분포 하였다.

<표 V-1> 수석교사 수업에서 나타난 '수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범' 차시별 분포

사회수학적 규범	한국 수석교사의 교실 수업									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	계
수학적으로 수용 가능 한 설명과 설명 방법에 대한 규범	1※	2※	2※	3※	3※	1※	1			13

(※ 표시는 본문에서 발췌한 에피소드를 나타냄)

이 규범은 동료들의 설명에서 오류가 발생했을 때 그것이 왜 오류라고 생각하는지를 나타내기 때문에, 설명 방법과 연계되어 나타난다. 설명에서 나타난 오류는 수학적인 오류 이상이며, 앞으로는 각각의 에피소드에서 수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범과 관련하여 나타난 다양한 양상들에 대해서 설명을 한다.

다음의 두 상황은 1, 2차시 수업에서 학생들이 용어의 개념을 설명하는 과정에서 나타난 교실 담화이다. 인수분해 학습의 도입에 해당하는 이 수업에서는, 인수분해를 위해 학습해야 하는 용어의 의미를 정확히 아는 것을 목적하였다. 학생들은 친구의 표현에서 수용가능 한 설명인지 아닌지를 어떻게 판단할 수 있는지에 대한 다양한 양상을 확인할 수 있다.

아래 담화문은 1차시 4번째 에피소드의 일부이다. 이 에피소드에서는

인수분해를 위해 학생들이 알아야 할 수학 용어 “전개”와 “인수”의 의미에 대해서 탐색한다.[19)]

<표 V-2> 수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범 예: 1-E4

수업 1차시: 인수분해의 역사와 인수분해를 학습하기 위해 필요한 수학 용어 학습

에피소드 4: 학습한 용어가 답이 되게 질문 만들기

과제: 수학 용어 “전개”와 “인수”의 의미 탐구

	화자	담화	행동
164	선생님	전개, 어떻게 전개를 하면 될까요?	
		(생략)	
168	5조(?)	**괄호를 모두 없애 줘야 한다.**	
169	선생님	괄호를? **괄호를 모두 없앤다.**	
170	1조(1)	1조	손을 든다.
171	선생님	1조	
172	1조(1)	**괄호를 푼다?**	
173	선생님	**괄호를 푼다?**	
174	2조(1)	2조	
175	선생님	2조	
176	2조(1)	분배법칙을 이용해서	
177	선생님	어떤 모양을, 괄호를 푸는 거야!	2명의 학생이 손을 든다.
178		조를 외치시고	2조(3)을 지목한다.
179	2조(3)	복잡한 모양	1조(1)이 손을 든다.
		(다함께 웃음)	선생님은 학생을 지목한다.
180	1조(1)	곱해진 형태로 이루어 진 것을 덧셈의 합으로 나타낸 것	
181	선생님	그렇지 다항식의 곱 형태를 괄호를 풀어서 어떻게 해!	
		(생략: “인수”의 의미탐구)	
258	선생님	1조	
259	1조(3)	두 개 이상의 다항식의 곱을 나타낼 때 각각의 식을 처음 다항식의	책을 보다 바로 고개를 들며 설명한다.
260	선생님	저렇게 영원 없는 식은.	
261		자기가 알고 말해야 해	
262		읽지 마시고, 다시 다시 다진이 처럼 하시면 돼요. 자기가 기억 하는	

19) 담화에서 등장하는 학생의 이름은 모두 가명으로 처리되었다. 담화문의 굵은 표시는 연구자가 강조하고 싶은 부분을 표시하기 위하여 의도적으로 표시 하였다. 또한 담화문의 번호가 굵은 박스 처리 된 것은 이 담화를 분석하는데 사용되는 것으로 표시한 것이다.

먼저 전개에 대한 의미를 설명하는 담화 168번~175번에서 나타난 학생들의 담화와 교사의 담화의 패턴을 보자. 위 담화에서는 '학생의 발표-교사의 재성-학생의 발표의지 표시-교사의 학생지목'이라는 패턴이 나타난다. 이러한 패턴은 수석교사의 수업이 진행되는 동안 반복적으로 나타난다. 지금 발췌한 위의 상황에서는 해결해야 하는 질문(전개의 의미는 무엇인가?)이 존재하고 있고, 그것에 대한 답을 찾는 과정에서 나오는 담화이다. Mehan(1979)은 수학교실에서 질문-대답-평가(IRE)라는 담화 패턴이 지배적으로 나타난다고 밝힌 바 있다. 이 수석교사의 반복된 담화 패턴은 IRE패턴에서 대답에 해당하는 담화를 처리하는 방식이라고 할 수 있다. 이를 그림으로 나타내면 아래와 같다.

질문 → 대답 → 재성 → 발표의지 표시 → 지목 → 평가

이 처리 과정에서 교사의 재성(revoicing)이 독특한 역할을 한다. 다시 말해, 교사의 재성은 학생의 설명이 충분하지 않음을 나타냄과 동시에 다른 설명을 요구한다는 의미도 포함되어 있다. 즉, 학생들은 이러한 교사의 재성을 통해 위와 같은 의미를 즉각적으로 포착하고 수업에 참여한다. 교사의 재성은 학생이 참여에 대응하는 하나의 행동 방식임과 동시에 학생의 참여에 영향을 주는 객체화된 것으로 해석할 수 있다.

위 에피소드에서 주목하고자 하는 것은 179번의 대화와 그 뒤에 따른 웃음의 의미이다. "복잡한 모양"이라는 179번의 대화는 왜 학생들에게 웃음을 유발하게 하였을까? 매우 순간적인 상황이지만, 179번 "복잡한 모양"이라는 답은 이 교실에서는 받아들여지지 않는 설명임을 의미한다. 즉, "복잡"이라는 모호하고 애매한 표현은 수학 용어를 설명할 때 갖추어야 할 요건에 부합하지 않는다는 의미를 이 교실에서는 공유하고 있는 것으로 해석할 수 있다.

그 뒤로 이어지는 담화는 "인수"의 의미를 설명하는 상황이다. 이때, 260~262로 이어지는 교사의 대화를 보자. 교사는 학생이 교과서에 있는

것을 그대·로 읽어 내린 설명은 받아들여 주지 않는다. 즉, 수학적 설명은 이해를 바탕으로 하여 자신의 언어로 해야 하는 것이라는 의미를 만들어내는 상황이다.

2차시 수업 초반까지 인수분해와 관련된 수학 용어에 대한 학습이 이어졌다. 다음 2차시 2번째 에피소드에서 나타난 담화문은 "공통인수"의 의미를 설명하는 과정에서 발생한 것이다.

<표 V-3> 수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범 예: 2-E2

수업: 2차시 공통인수로 인수분해 하기			
에피소드 2: 인수분해와 관련된 수학 용어를 활용한 빙고 게임			
과제: 수학 용어 "공통인수"의 의미			
	화자	담화	행동
38	학생[20]	그러면은 공통인수 할게요.	
(…)			
47	2조(3)	나? 한 다항식에서 공통된 인수가 이렇게 인수분해를 하면은	
48	선생님	공통인수를 설명하면서 공통 인수라 아하하	
49		(학생들에게서 답이 잘 나오지 않자) 지난시간에 정리 했는데 책에도 나와 있고, 영오야 시켜야지 될 때까지	

위 담화는 학습한 수학 용어로 빙고게임을 하는 상황에서 발생한 것이며, 학생 2조(3)은 공통인수의 의미를 이해하고 있으나 그것을 설명하는 방법에서 오류를 범한다. 48번 교사의 담화는 학생이 설명하려는 것을 사용하여 설명하는 순환논리의 문제를 지적한다. 교사의 설명을 통해서 수학적 설명을 할 때 "순환논리로 설명하지 않음"이라는 규칙을 수용해 가면서, 학생들은 다시 공통인수의 의미를 설명하려는 시도를 한다.

20) 발화하는 학생이 불분명할 때에는 "학생"으로 표시 하였다.

<표 V-4> 수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범 예: 3-E4

수업: 3차시 완전제곱식으로 인수분해하기_기초			
에피소드 4: 짝과 함께 공통인수로 인수분해 문제를 칠판에 풀기			
과제: $(x-1)(x-2)+(x+3)(x-1)$ 을 인수 분해 하여라.			
	화자	담화	행동
59	선생님	애들아 너희들은 앞사람 실수 중에. 친구의 실수가 나의 기쁨인거 알죠!	
60	1조(1)	친구의 실수를 찾았으면 어떻게 하죠?	
61	선생님	그걸 찾아 낸 사람에게 개인 스티커 갑니다.	
62		찾았으면 나오셔서 지우지 말고 다른 색깔로 옆에다 쓰세요.	
63	학생	안 보인다요	
64	선생님	기다려 기다려 주세요	2조(3)이 손을 든다
65	2조(3)	저 보충할 것도 손들어도 돼나요?	
66	선생님	있다가 말로 하시면 돼요	
(…)			
77	2저(3)	지워도 될까요?	칠판으로 간다.
78	선생님	안되지.	
79	3조(1)	안된데	
80	2조(3)	이렇게 **마구잡이로 하지 않고**, 고치겠습니다.	
81		A B C A 그러면은 **더 깔끔하죠?**	

학생들에게 교사는 동료의 설명의 실수를 바탕으로 수정 보완해 나가 방법으로 의사소통 하도록 요구한다. 그 것에 대한 담화문은 위의 59번~62번에 나타난다. 학생들에게 요구하는 활동임과 동시에 교사가 학생들에게 기대하는 수학적 의사소통이 어떠한 모습인지를 보여주는 것이다. 학생들은 교사의 설명을 수용하는 태도를 보인다. 그 이후학생들은 료의 풀이를 두고 그 옆에 다른 색을 이용하여 풀이를 보완하며 설명한다.

70번 대화에서 교사는 먼저 교실에서 친구들의 발표에서 수정 보완할 점이 있는지 물었다. 이러한 수업 활동은 학생들의 참여에 영향을 미치는 것으로 교실 활동이라는 형태로 객체화 되어 나타나는 것으로 분석된다. 즉 교사가 제안한 활동은 학생들의 참여를 유도하였다.

77번에서 79번의 대화로 수정 보완을 할 때에는 “친구의 설명을 기초로 해서 수정하기”라는 규칙이 객체화 되어 나타남을 보여준다. 80번에서 학생의 설명은 친구의 설명을 지우지 않고, 그 위에 설명을 더해가면서, 객체화된 규칙은 즉각적으로 학생의 참여를 이끌었고, 의미 협상의 과정이 교사의 제안에 의해 즉각적으로 일어났음을 확인 할 수 있다. 3차시 4번째 에피소드에서 학생의 기록물과 담화는 “무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대한 규범”을 설명할 때, 더 자세히 제시되어 있다.

수학적 설명 방법에 대한 규칙은 “친구의 설명을 기초로 해서 수정하기” 외에도 다양하게 나타났다. 다음은 4차시 완전제곱식으로 인수분해 하는 것을 학습하는 상황에서 이차식 x^2-5x+4가 완전제곱식으로 인수분해 되는지 안 되는지에 대하여 논의하는 과정에서 발생한 학생들의 담화이다. 이 담화는 수학적으로 의사소통 하는 또 다른 방법을 보여준다. 학생들이 자신의 풀이를 설명하기 위해서 표현하는 방법에 대해 주목하여 담화를 살펴보자.

<표 V-5> 수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범 예: 4-E3

수업: 4차시 완전제곱식으로 인수분해 하기_심화			
에피소드 3: 짝과 함께 완전제곱식을 인수분해 되는 예와 되지 않는 예를 구분하여 논의하기			
과제: x^2-5x+4가 완전제곱식으로 인수분해 될 수 있을까			
	화자	담화	행동
75	2조(5)	**이거는 x^2 이거는 무엇을 제곱이죠?**	x^2을 가리킨다.
76	학생들	x	
77	2조(5)	**4는 뭐의 제곱이죠?**	4를 가리킨다.
78	학생들	2요	
79	2조(3)	뭐하는 겁니까?	
80	학생들	맞어	
81	2조(5)	(조금 머뭇거리다가)**이 x랑 2를 곱하면 무엇이 되나요?**	
82	학생들	$2x$	
83	2조(5)	**그러면 이 $2x$가 이 $2x$의 제곱이 $5x$가 됩니까?**	
84	학생들	1조요 5조요	

85	선생님	1조 짝궁 나오세요.	
	1조(5)	(칠판으로 나온다)	
86	선생님	지금 짝에 대해서 지나치게 자신만만 했는데, 조금 더 확인하셨어야 해요	
87	1조(5)	일단은 4가 되려면 2의 제곱 또는 -2의 제곱이 4가 돼요. 근데	
88	선생님	잠깐 질문을 하셔요.	
89	1조(5)	뭘 제곱해서 4가 나올까요?	
90	학생들	2하고 -2요	

2조(5) 학생이 칠판 앞에 기록되어 있는 x^2-5x+4의 항을 하나씩 짚어 가면서 설명하는 75번, 77번, 81번 83번의 대화는 모두 질문의 형태이다. 즉, 자신이 알고 있는 것을 설명할 때, 이 교실에서는 동료 친구들에게 질문하면서 설명해야한다는 규범이 형성되어 있는 것으로 볼 수 있다. 이때, 동료 학생들 역시 칠판 앞에 나가 설명하는 친구의 질문에 답하는 자신의 역할을 수행하고 있다.

이러한 규범은 위의 담화문 87번~89에서도 잘 보여준다. 84번의 대화는 2조(5)학생의 설명을 수용할 수 없음을 공유하고 그 뒤로 새로운 발표자 1조(5)의 설명이 시작되는 순간인 87번의 대화를 보자. 이때, 이 학생은 교실에서 형성되어 있는 수학적으로 의사소통하는 방법에 대한 규범을 위배하였다. 즉, 질문하면서 설명하다는 의사소통 방법이 아닌 자신이 이해하고 있는 바를 설명하는 방식을 취했다. 그리고 88번에서 교사는 그러한 설명 방법을 제지 시키고 질문 형식으로 발표하도록 요구한다. 88번의 대화는 87의 대화가 학생들에게 기대되는 설명의 방식을 따르지 않았기 때문에, 교사는 중재를 나섰고 이때 “질문 형식으로 발표하기”라는 규칙이 객체화되어 나타나는 순간으로 해석할 수 있다. 즉, 동료 앞에서 자신의 풀이를 설명할 때, 기대되는 의사소통 방법은 질문의 형태로 의사소통하는 것이다. 그 이후 학생은 자신의 설명 방법을 즉각적으로 변화 시킨다. 이때 학생들이 구성하게 되는 의미는 이 교사의 대화는 학생들에게 이 교실에서 발표할 때에는 자신이 이해하는 바를 설명하는 것이 아니라 듣고 있는 친구들에게 질문하면서 자신의 풀이를 친구들

이 이해할 수 있도록 발표하는 것으로, 교사와 학생의 의미협상의 과정이라 해석된다. 의미협상의 과정이 매우 순간적으로 일어났음을 알 수 있다.

다음은 5차시 수업에서 학생이 자신의 풀이를 설명하는 상황에서 발생한 담화이다. 합차 공식을 이용하여 인수분해를 배우는 수업으로, “$a^2-\square=(a+\frac{1}{2})(a-\square)$”의 빈칸에 들어갈 적절한 수를 찾는 과제를 해결하고 있다.

담화 421번에서 1조(5)는 위에서 설명한 “질문 형식으로 발표하기”라는 규칙을 따르면서 발표함을 확인할 수 있다. 계속되는 설명으로 423번의 담화를 보자. 이후 뒤따를 학생들의 반응(424~425번)을 통해 423번 담화가 수용할 만한 설명은 아님을 보여준다.

<표 V-6> 수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범 예: 5-E16

수업: 5차시 합차 공식을 이용하여 인수분해 하기			
에피소드 16: 활동지 문제를 학생이 해결하고 그 이유를 설명하고			
과제: 다음 $\square$안에 알맞은 수를 써 넣어라. $a^2-\square=(a+\frac{1}{2})(a-\square)$			
	화자	담화	행동
418	1조(5)	(학생이 칠판으로 나와 문제를 푼다)	
419	선생님	(벨을 울린다) 저 친구가 지금 네모 칸에 분수 두개 썼는데 왜 그렇게 썼는가 들어보시죠.	
420		설명까지 좋으면 2점	
421	1조(5)	$a^2-\frac{1}{4}$ 은 $\frac{1}{4}$을 제곱으로 바꾸면 뭘까요?	
422	학생들	$\frac{1}{2}$	
423	1조(5)	$\frac{1}{2}$이 예요. $a^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$이니까 이것은	
424	5조(2)	틀린 거 아닌가요?	
425	1조(1)	선생님 우리가 $\frac{1}{4}$을 모르고 있잖아요.	칠판의 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$를 지운다.
426	선생님	맞아. 이거 우리가 모르고 있는 상태.	
427		아 지금 보니까 자기 조에서 발표하고 자기 조에서 공격하고 아주 좋은 자세예요.	
428		자기 짝 이예요.	

421번과 423번의 담화에서 학생 1조(5)는 빈칸에 들어갈 수를 $\frac{1}{4}$로 두고 설명한다. 즉, 과제의 답이 각각 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$임을 알고, 그것을 확인하는 과정으로 설명을 진행하고 있음을 알 수 있다. 1조(5)의 설명에 뒤따르는 학생들의 반응은 동료의 설명이 적합하지 않음을 보여준다. 정확히 425번 담화에서 학생 1조(1)은 동료의 설명이 가지고 있는 한계를 정확하게 지적한다. 즉, 수학적 풀이를 설명하는 것은 구한 답 $\frac{1}{4}$을 모르고 있다고 가정하고 설명해야 한다. 다시 말해, 수학적 풀이를 설명하는 것은 그 답을 구하는 과정을 드러내야 함을 언급한 것이다. 이 교실에서는 이미 수학적 설명이 갖추어야 할 요건에 대한 규범이 형성되어 있는 것이다.

다음은 6차시 수업에서는 수학적 설명 방법에 대한 또 다른 양상이 나타났다. 아래 담화문에서는 $a^2-b^2=40$이 되는 자연수 순서쌍 (a, b)를 찾는 과제를 해결하고 있다. 40을 두 자연수의 곱으로 나타내 그 수를 각각 $(a+b)$와 $(a-b)$로 두어 연립방정식으로 과제를 해결하는 과정에서 $(a+b)$와 $(a-b)$중에서 더 큰 수를 찾는 상황이다.

<표 V-7> 수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범 예: 6-E4

수업: 6차시 $x^2+(a+b)x+ab$꼴의 다항식 인수분해 하기

에피소드 4: 유제를 선생님 중심으로 해결하기

과제: 두 자연수 a, b의 제곱의 차가 40일 때, a, b의 순서쌍 (a, b)를 모두 구하여라. (단, $a>b$)

	화자	담화	행동
127	선생님	곱해서 40이야. 근데 애들아 $a+b$가 크게 $a-b$가 크게?	판서) $(a-b)(a+b)=40$
128	학생들	$a+b$	
129	선생님	왜 그렇게 생각해요?	
130	1조(1)	1조 (여러 조에서 학생들이 손을 든다)	
131	선생님	얘 말이 맞지 않다는 것을 보여주기 위해서는 우리는 어떻게 하면 돼?	
132	1조(1)	반례를 들어요.	
133	선생님	반례를 들어주면 돼지 그렇죠.	
134		얘가 얘는 뺀 거니까 더 한 게 더 커요라고 했지.	

135		여러분 생각해 보세요.	
136		$a=3$이고, $b=-2$일 때, 더하면 얼마야	
137	2조(3)	1이요	
138	선생님	빼면 3 빼기 빼기 2 는	
139	2조(3)	5요	
140	선생님	거봐 ($a-b$를 가리키며)이게 더 크잖아.	
141	3조(3)	선생님 저요 저요 저요	
142	3조(3)	선생님 근데요. 반례를 들 때요, b가 자연수 일 때 잖아요.	
143	선생님	정말 좋은 지적 이예요.	
144		여기서 얘가 말할 때, 이 말이 더 들어갔어야 하는 거야.	
145		더하니까 커요가 아니라 둘 다 자연수니까 더 한 게 뺀 거보다 클 수밖에 없으니까 이렇게 말해 자연수란 조건을 말하면서 말해.	
146		이 지적도 좋아 3조.	

131번의 담화에서 교사는 이 주장이 맞지 않음을 보여주는 방법에 대한 논의를 시작한다. 131번~133번의 담화를 통해 학생들은 수학적 반례의 역할을 이해하고 있는 것으로 알 수 있다. 또한 이어지는 142의 담화는 반례가 가져야 하는 조건도 잘 이해하고 있는 것을 보여준다. 조건 p, q와 각 조건의 진리 집합을 P, Q라 할 때, 명제 $p \rightarrow q$가 맞지 않음을 보여주기 위해서는 $P \cap Q^c$의 원소로 반례를 찾아야 한다. 142번 담화에서 학생 3조(3)은 조건에 해당하는 'a, b가 자연수'인 조건을 만족하는 예를 찾아야 한다고 지적한다.

나. 무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대한 규범

수학적으로 효율적인 풀이와 그렇지 않은 풀이를 구분하고 그것에 대한 규범을 형성하기 위해서는 교실 안에서 효율적인 것을 판단하는 기준을 무엇에 두는지에 대한 합의가 이루어 져야 한다. 한국 수석교사의 수업에서 총 8번의 에피소드 안에서 무엇이 수학적으로 효율적인지에 대한 논의가 이루어 졌다. 한국 수학교실에서 사회수학적 규범 중에 약 22.2%라는 높은 비중을 차지하는 규범이다. 8번의 에피소드는 다음과 같이 분

포 되었다.

<표 V-8> 수석교사 수업에서 나타난 ‘무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대한 규범’ 차시별 분포

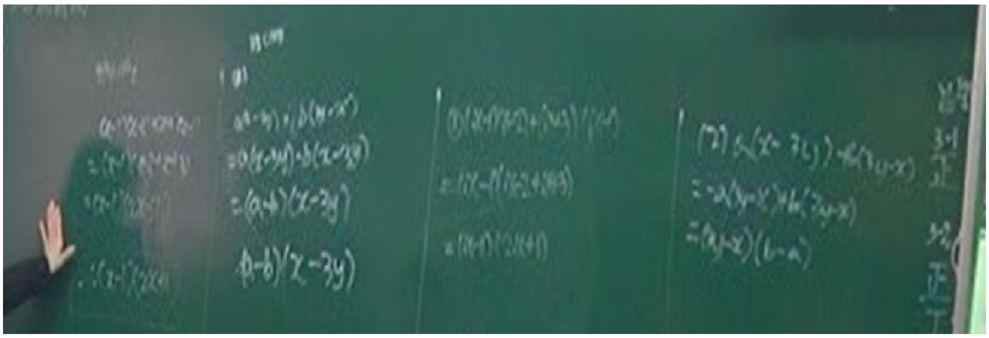
사회수학적 규범	한국 수석교사의 교실 수업									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	계
무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대한 규범			3※	1		1	2		1	8

(※ 표시는 본문에서 발췌한 에피소드를 나타냄)

3차시 수업은 학생들 간의 논의를 통해 이 규범을 형성해 가는 것을 잘 보여준다. 다음은 3차시 4번째 에피소드에서 발췌한 담화 내용이다. 3차시 수업은 완전제곱식으로 인수분해하기를 도입하는 차시이면서, 에피소드 4는 이전 차시에 학습한 공통인수로 인수분해 하는 것을 복습하는 상황이다. 학생들은 짝과 함께 아래의 인수분해 문제를 해결하였고, 그 중 2개조에서 짝으로 4명의 학생이 칠판에 나와 자신들의 풀이를 기록하였다. 칠판에는 네 명의 학생들의 풀이가 다음과 같이 기록되어 있다.

<표 V-9> 공통인수가 다항식인 인수분해 문제

3. 다음 식을 인수분해 하여라.
(1) $(x-1)(x-2)+(x+3)(x-1)$ (2) $a(x-3y)+b(3y-x)$



[그림 V-1] 학생들의 4개의 풀이

녹화된 화면의 가독성이 낮아 앞으로 논의가 될 칠판의 가장 왼쪽에 기

$$(x-1)(x-2)+(x+3)(x-1)$$
$$=(x-1)(x-2+x+3)$$
$$=(x-1)(2x+1)$$
$$\therefore (x-1)(2x+1)$$

[그림 V-2] 칠판의 왼쪽풀이

술되어 있는 풀이를 다시 작성하였다. 그것은 왼쪽 그림과 같다.

교사는 칠판에 기록되어 있는 동료들의 풀이 중에서 보완할 점이 있는지 없는지를 물었고, 이 때 한 학생은 첫 번째 풀이에 문제가 있으며, 인수분해를 하기 위해서는 치환을 사용해야 한다고 주장한다. 다음은 그것에 대해 함께 논의하는 상황에서 발생한 교실 담화이다. 아래의 담화는 4번째 에피소드(50번~108번)의 일부를 발췌한 것이다.

<표 V-10> 무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대한 규범: 3-E4

수업: 3차시 완전제곱식으로 인수분해하기_기초			
에피소드 4: 짝과 함께 공통인수로 인수분해 문제를 칠판에 풀기			
과제: $(x-1)(x-2)+(x+3)(x-1)$ 을 인수 분해 하여라.			
	화자	담화	행동
70	선생님	여기 보완할 것이 있다.	
71		틀린 것이 있다	2조(3)이 손을 든다.
72		어 아들!	
73	2조(3)	어 하승우꺼 랑 첫 번째 꺼 랑	
74	학생들	(소란스럽게)왜에	
75	선생님	첫 번째 거 어느 부분이?	
76	2조(3)	일단 저렇게 하면은 **굉장히 실수가 많습니다.**	
(조금 소란해진 학급을 집중시키기 위해 칠판 왼쪽에 달린 벨을 울린다)			
77		지워도 될까요?	칠판으로 간다.
78	선생님	안되지.	
79	3조(1)	안된데	
80	2조(3)	이렇게 **마구잡이로 하지 않고**, 고치겠습니다.	
81		A B C A 그러면은 **더 깔끔하죠?**	
82		그럼 A B	AB+CA를 쓴다
83	학생들	(음성 겹침)아 **그럼 똑같잖아.**	
84	2조(3)	아이 들어봐!	
85		이렇게 해서 A를 뺍니다.	A(B+C) $(x-1)(x-2+2+3)$ 를 쓴다
86		여긴 B 여긴 C 이런 형태가 되죠?	
87		이걸 치환이라 합니다.	
88		-1 하고 B+C 이니까 -2	

89	3조(1)	그렇게 하면 **풀이가 길어지잖아.**	A(B+C) $(x-1)(x-2+x+3)$ 으로 고쳐 쓴다.
90	2조(3)	이렇게(치환하지 않고)하면 감점돼요.	
91	2조(2)	(소란스럽게) x가 아니잖아.	
92	1조(1)	넌 아예 틀렸어. (웃음)	
		(생략)	
105	선생님	일단 여러분에게 의견을 묻겠습니다.	
106		31명에게 묻는다.	
107		하승우의 풀이보다 이 풀이가 더 **간결하다** 라고, **알아보기 쉽다**고 생각하는 사람?	손을 든다
108	선생님	only one 한명 입니다.	2조(3)이 손을 든다

위 담화문에서는 여러 가지 사회수학적 규범이 복합적으로 드러난다. 무엇이 수학적으로 더 효율적인가에 대한 규범 뿐 만 아니라, 수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범도 나타나는 것으로 해석된다.

이 절에서는 무엇이 수학적으로 더 효율적인가에 대한 규범에 초점을 맞추어 살펴보고자 한다. 먼저, 칠판에 기록되어 있는 인수분해는 수학적으로 오류 없이 잘 인수분해 되어 있었다. 그러나 2조(3)학생은 이 풀이를 “실수가 많은” 풀이 또는 “마구잡이 식” 풀이라고 보았다. 그의 대화 76번과 80번을 살펴보라. 그리고 이 학생의 풀이 전략은 치환의 아이디어를 사용하는 것이다. 구체적으로 치환의 아이디어는 대화 81번부터 객체화 되어 나타난다. 치환이 객체화 되었다는 것은 이 아디이어가 2조(3)학생의 풀이에 변화를 주었으며, 학급의 다른 동료들의 논의의 대상으로 부각되었음을 뜻한다.

학생들은 이 수학교실에서 치환을 이용하여 인수분해 하는 것을 경험해 보지 않았고 “치환”이라는 용어 역시 사용하지 않았다. 그 아이디어만 중학교 2학년 다항식의 곱을 학습하면서 경험했을 뿐이었다. 뒤따르는 학생들의 대화는 새롭게 등장한 치환으로 하는 문제해결이 효율적이 않음을 공유하고 있음을 보여준다. 특히, 대화 83번 “똑같은 풀이”, 대화 89번 “풀이가 길어진” 풀이라는 논의는 2조(3)이 제안하고 있는 풀이가 이전의 풀이보다 더 효율적이지 않음을 학생들 간에 논의 되어 가고 있음을 보여준다.

$AB+CA$	$\underset{A}{(x-1)}\underset{B}{(x-2)}+\underset{C}{(x+3)}\underset{D}{(x-1)}$
$A(B+C)$	$=(x-1)(x-2+x+3)$
$(x-1)(x-2+x+3)$	$=(x-1)(2x+1)$
$(x-1)(2x+1)$	$\therefore\ (x-1)(2x+1)$

[그림 V-3] 2조(3)의 수정한 풀이(굵게 표시)

2조(3)은 몇 번의 수정을 거쳐서 최종적으로 위의 굵게 기록된 것과 같이 풀이를 칠판에 적었다. 그동안 교사는 학생들의 논의에 직접적인 개입을 하지 않는다. 이때, 학생들 사이에서 무엇이 수학적으로 효율적인 풀이인지에 대해 의미 협상이 지속적으로 일어나고 있다고 볼 수 있다. 교사가 등장하는 순간은 2조(3)학생이 풀이를 다 작성하고 학생들 간의 논의가 거의 마무리 된 때이다. 105번부터 등장하는 교사의 담화를 보자. 교사는 학생들에게 무엇이 더 간결 한가 그렇지 않은가에 대한 질문을 한다. 학생들이 암묵적으로 협상의 과정을 명시화 시키는 순간이다. 교사는 아직 자신의 풀이가 효율적이라고 생각하고 있는 2조(3) 학생에게 다른 학생들의 생각을 명시적으로 보여주기 위해서, 동시에 무엇이 효율적인 풀이인지에 대한 학생들의 의미를 구성할 수 있도록 하기 위해서 개입을 한다. 비록 치환의 아이디어를 처음 제공한 학생은 "무엇이 수학적으로 더 효율적인가"에 대하여 명시적인 의미협상 과정에서 자신의 치환의 아이디어가 받아들여지는 데에는 실패하였다. 그러나 그것에 대한 의미협상의 과정을 경험 하도록 하는 순간을 만들어 낸 장본인이라 할 수 있다.

이 활동은 초기 짝과 함께 문제를 해결하는 교실 활동에서부터 시작된 것이다. 이때 학생들이 암묵적 협상과정에서 무엇이 수학적으로 더 효율적인 풀이인지를 논의하기 위하여, 학생들은 "치환"과 "풀이의 길이" 그리고 그 풀이가 근본적으로 다른 풀이인지에 대하여 논의하였다. 그 과정에서는 학생들 사이에서 암묵적 협상의 과정을 통해 진행되며, 이 에피소드를 마무리 하면서, 교사에 의해 명시적인 협상과정 또한 진행된다.

이때 풀이의 간결함과 알아보기 쉬움을 판단의 근거로 제시한다. 학생과 교사의 이러한 협상의 과정이 일어날 수 있었던 것은 학생들의 풀이를 바탕으로 풀이를 보완하도록 하는 교사의 수업 활동과 이미 수학교실에서 형성되어 있는 "친구의 설명이 부족한 경우 언제든지 자신의 생각을 발표할 수 있다"라는 사회적 규범이 복합적으로 작용한 것으로 확인할 수 있다.

교사는 칠판의 전체 풀이들을 비교하는 5번째 에피소드(109번~218번)에서 다시 한 번 이 상황을 정리한다. 이 전의 4번째 에피소드에서는 학생들의 논의를 중심으로 무엇이 수학적으로 효율적인 것인지에 대해 의미를 협상해 가는 상황이라면, 에피소드 5에서는 교사 주도로 그것을 설명하는 상황이다. 아래 담화문은 에피소드 5의 일부를 발췌한 것이다.

<표 V-11> 무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대한 규범: 3-E5

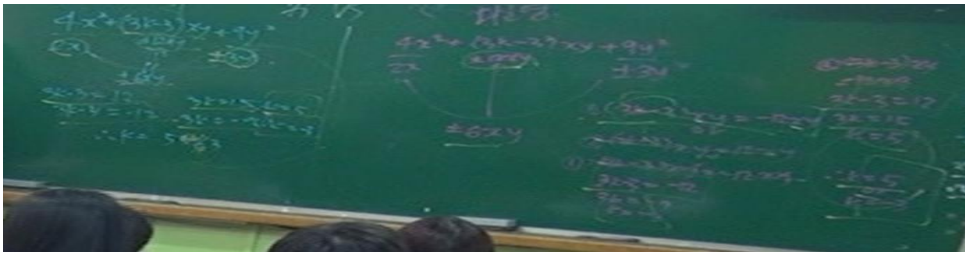
수업: 3차시 완전제곱식으로 인수분해하기_기초			
에피소드 5: 학생들의 풀이를 비교하며 교사가 평가하기			
과제: $(x-1)(x-2)+(x+3)(x-1)$, $a(x-3y)+b(3y-x)$를 인수분해 하여라.			
	화자	담화	행동
140	선생님	그런데 지금 이 아들이 무슨 생각을 했느냐면.	
141		얘랑 얘랑 똑같으니까 둘 다 A라고 놓으면 어때요!	$(x-1)$을 가리킨다.
142		얘랑 얘랑 다르니까 새로운 식 B, C라고 놓은 거예요.	
143		이렇게 바꿨어요.	AB+CA를 가리킨다.
144		이식을 이렇게 바꿨어.	
145		나 혼자 A를 뭐라고 놓은 거야.	
146		속으로 얘를 A라고 놓은 거야. 속으로.	
		(생략)	
158		치환이라는 말은 1학년 때 들어본 적이 있어요. 5조!	5조에 상점을 체크한다.
159		그러면 **이 방법을 쓰는 건 더 편할 때** 이 방법을 쓰는 거야.	
160		**그냥 할 수 있을 때, 그냥 해도 쉬울 때 쓰지 않는 것**이 좋습니다.	
161		아시겠죠?	
162		그래서 이 친구 아이디어 낸 건 좋은데 **이것보다는 더 효율적인 방법이었다고 인정 할 수는 없어** 지금.	
163		좋아 근데 아이디어를 냈으니까 일단 한 점을 주겠어요.	3조에 상점을 체크한다.

이 담화에서는 무엇이 수학적으로 효율적인가에 대한 규범을 형성하

는 과정에서 학생들의 참여가 두드러지지는 않지만, 교사의 설명 159번~162번은 학생들의 논의에서 등장한 “치환”, “풀이의 길이”, “서로 다른 풀이”, “간결함”, 그리고 “알아보기 쉬움”은 종합한 결과이다.

4차시 수업 이후로 다섯 번의 에피소드 안에서 무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대해서 논의 되었다. 학생들 간의 논의를 통해서 발생한 것 보다는 위의 담화 3차시 에피소드 5에서 발현된 것과 같이 주로 교사의 설명을 통해서 나타났다. 이러한 교사의 설명이 발생은 학생들의 풀이를 비교해주면서 발생하는 것으로 확인 할 수 있었다.

아래 담화가 시작되기 전에 칠판에는 $4x^2+(3k-3)xy+9y^2$이 완전제곱식이 되기 위한 상수 k의 값을 구하기 위한 두 학생의 풀이가 적혀 있다. 칠판에 노란색으로 적힌 것은 교사가 설명하면서 작성한 것이다. 칠판에 기록한 학생의 풀이의 가독성이 다시 제시한다. 특히 오른쪽에 작성된 학생의 풀이를 교사가 설명하는 과정에서 아래의 담화가 시작된다.



$4x^2+(3k-3)xy+9y^2$ $2x \quad \pm12xy \quad \pm3y$ $\Uparrow$ $\pm6xy$ $3k-3=12, \quad 3k=15, \quad k=5,$ $3k-3=-12, \quad 3k=-9, \quad k=-3,$ $k=5,-3$	$4x^2+(3k-3)xy+9y^2$ $2x \quad \pm12xy \quad \pm3y$ $\pm6xy$ ② $(3k-3)xy = 12xy$ $3k-3=12,$ $3k=15$ $k=5$ $(3k-3)xy=12xy$ $(3k-3)xy=-12xy$ ①$(3k-3)xy=-12xy$ $3k-3=-12,$ $3k=-9$ $k=-3$ $\therefore k=5,$ or $k=-3$

[그림 V-4] 인수분해와 관련한 두 학생의 풀이

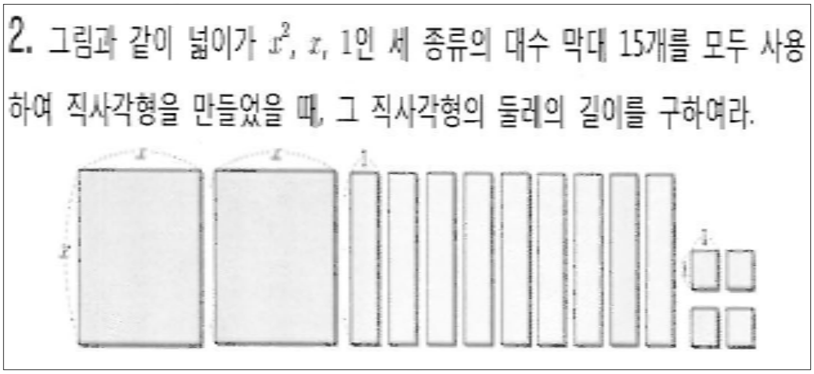
이 담화에서는 학생의 풀이를 바탕으로 그것을 수정하면서 발생하기 때문에, 무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대한 규범과 문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현 할 것인지에 대한 규범이 동시에 나타난다.

<표 V-12> 무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대한 규범: 4-E10

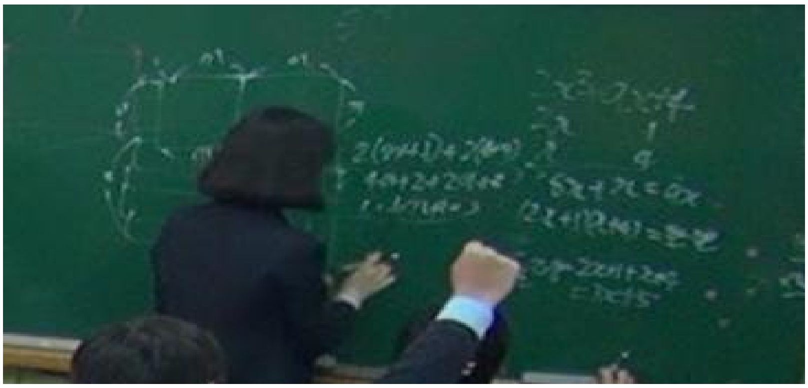
<table>
<tr><td colspan="4">수업: 4차시 완전제곱식으로 인수분해하기_심화</td></tr>
<tr><td colspan="4">에피소드 10: 두 학생이 도전문제를 칠판에 풀고, 교사는 두 풀이의 차이를 설명</td></tr>
<tr><td colspan="4">과제: $4x^2+(3k-3)xy+9y^2$이 완전제곱식이 되기 위한 상수 k의 값을 모두 구하여라.</td></tr>
<tr><td></td><td>화자</td><td>담화</td><td>행동</td></tr>
<tr><td>364</td><td>선생님</td><td>어떤 부분 때문에 차이가 났는지 봅시다.</td><td></td></tr>
<tr><td>365</td><td></td><td>여기 까지는 똑같아.</td><td></td></tr>
<tr><td>366</td><td></td><td>여기까지는 완전 똑같애 두 사람이 서로 보고 쓴거 아닌가 싶을 정도로 똑같아.</td><td></td></tr>
<tr><td>367</td><td></td><td>그런데, (오른쪽)이 친구는 얘랑 얘랑 같다는 걸 이 식을 한 번 썼죠.</td><td rowspan="3">$(3k-3)xy=12xy$
$(3k-3)xy=-12xy$
가리키고, 그 식들에 가로줄을 긋는다.</td></tr>
<tr><td>368</td><td></td><td>이렇게 하지 않는 다는 거죠.</td></tr>
<tr><td>369</td><td></td><td>여기는 같으니까 그냥 계수끼리 같다고 바로가면 두 줄 전략이 될 거라는 거죠.</td></tr>
<tr><td>370</td><td></td><td>이리로 바로 가라는 거죠.</td><td rowspan="2">$3k-3=12,\ 3k-3=-12$에 네모를 그린다.</td></tr>
<tr><td>371</td><td></td><td>그럼 몇 줄이 절약되기 때문에 굉장히 효율적으로 빨리 풀 수 있게 된다는 거야.</td></tr>
<tr><td>372</td><td></td><td>중요한 건 꼭 써야 돼는 식은 써야 해 풀이에.</td><td></td></tr>
<tr><td>373</td><td></td><td>그렇지만 불필요한 식을 쓰다 보면 시간이 오래 걸리니까</td><td></td></tr>
<tr><td>374</td><td></td><td>필요한 것만 쓰고 뺄 것도 더 할 것도 없는 답안을 만드는 것이 중요 하다는 겁니다.</td><td></td></tr>
</table>

두 학생은 모두 완전제곱식의 인수분해임을 알고, 구하고자 하는 k의 값을 정확하게 계산해 내었다. 교사의 369번~374번의 담화는 정확한 답을 구하는 것 이상의 것이 이 교실에서는 요구되고 있음을 보여준다. 교사의 373번째 담화에서 반복되는 “불필요한 식”이 많은 풀이를 효율적이지 않은 풀이로 간주됨을 설명한다. 뒤 따르는 374번의 담화는 문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범과 관련하여 “필요한 것만 쓰고 뺄 것도 더 할 것도 없는 답”이 되도록 쓰기라는 설명이 추가되었다.

다음 7차시 9번째 에피소드에서도 두 가지의 규범이 동시에 나타난다. 수학적으로 다른 아이디어에 대한 규범과 함께 수학적으로 효율적인 것을 논의한다. 이 수업에서는 $acx^2+(ad+bc)x+bd$꼴의 인수분해를 학습하며, 다음의 과제에 대한 학생의 풀이에 대해 교사가 설명한다.



[그림 V-5] 활동지 인수분해 문제



[그림 V-6] 두 학생의 서로 다른 풀이

위 그림은 두 학생의 풀이를 보여준다. 왼쪽의 풀이에서 학생은 주어진 사각형들로 큰 사각형을 그림을 그려 만들어 큰 사각형의 둘레의 길이를 구한다. 오른쪽의 풀이는 주어진 사각형들의 넓이의 합을 인수분해하여, 둘레의 길이를 구하는 전략을 취한다. 그리고 두 학생은 모두 주어진 문제에 대해 정확한 답을 구하였다.

두 학생의 풀이는 서로 다른 해결 전략을 가지고 있었기 때문에, 그것

을 비교하는 교사의 설명에서는 자연스럽게 수학적으로 다른 아이디어에 대한 규범이 나타났다. 학생들이 각자 자신의 풀이를 작성하고, 교사는 뒤이어 학생들의 풀이를 기반으로 두 풀이의 차이점에 대해서 설명하였다.

그리고 교사는 왼쪽의 풀이를 보고 “이 접근 이 아이디어는 좋은데 이걸 만들어내는걸 우연에 기댈 수밖에 없다는 것이 조금 문제가 있는 거지”라고 언급한다. 시행착오를 통한 우연에 기댄 전략에 대비하여 ‘인수분해’라는 전략적 우수성에 대한 설명이다.

다. 무엇이 수학교실에서 논의 될 만한 내용인지에 대한 규범

수학수업에서 논의 할 수 있는 수학적 개념은 무엇이고 그렇지 않은 개념은 무엇인가에 대한 규범이 한국의 수석교사의 수업의 두 번의 에피소드에서 나타났다.

<표 V-13> 수석교사 수업에서 나타난 ‘무엇이 수학교실에서 논의 될 만한 내용인지에 대한 규범’ 차시별 분포

사회수학적 규범	한국 수석교사의 교실 수업									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	계
무엇이 수학교실에서 논의 될 만한 내용인지에 대한 규범			1	1※						2

(※ 표시는 본문에서 발췌한 에피소드를 나타냄)

이 규범은 한국의 수석교사의 수업에서만 나타난 규범이며, 선행연구에서도 언급되지 않은 규범이다. 독특한 성격의 이 규범이 나타나게 되는 수업 상황에 대해서 구체적으로 살펴보자.

4차시 11번째 에피소드에서 학생들은 조별로 인수분해 문제를 만들고, 각 조의 문제를 선생님과 함께 전체 지도를 통해서 해결한다. 3조에서는 $(x+2y)^2-2(x+2y)+1$를 인수분해 하는 문제를 만들었고, 그것을 공개하면서 아래의 담화가 시작된다.

<표 V-14> 무엇이 수학교실에서 논의 될 만한 내용인지에 대한 규범: 4-E11(1)

수업 차시: 4 완전제곱식으로 인수분해 하기_심화			
에피소드 11: 모둠별로 문제를 만들고 그 문제를 해결하기			
과제: 3조 문제 $(x+2y)^2-2(x+2y)+1$을 인수분해 하여라.			
	화자	담화	행동
382	선생님	오류를 발견하기 발견한 조에게 점수 주겠습니다.	3조의 문제를 실물 화상기에 올린다.
383	3조(1)	화이트를 칠 했습니다	
384	학생들	저요 저요	손을 든다.
385	선생님	어	
386	2조(2)	저희가 아직 안 배운 치환을 사용 했습니다.	
387	3조(1)	치환 배웠어	
388	선생님	아. 안 배운 치환을 사용해서.	
389		그럼 잠깐 동안만 이렇게 해놓고 생각해봐.	
390		그러면 이거 얘가 뭘 말하고 싶어 하는거 같애?	
391	학생들	완전제곱식	
392	선생님	그렇지	
393		그런데 어느 부분에 실수가..	
394		어? 없네! 문제 고쳤구나?	
395		그러면 지금 지난시간에 나와서 혼자 외롭게 치환을 주장했던 남자가 있었죠.	
396		그러면 우리가 잘 모르니까 잠깐 동안 만 그의 말대로 A 라고 놓읍시다.	
397		시~작	
		(생략)	
402	학생들	$(A-1)^2$	
403	선생님	그런데 이렇게 하고 좋아하면 안 돼.	
404		문제 속에 A가 없지 마지막에 얘를 찾아와야 해	
405		시작	
406	학생들	$(x+2y-1)^2$	
407	선생님	이거 고등학교 올라가면 나와요	
408		그러나 여러분이 하고 난 다음에 오늘 한 것 만으로도 할 수 있지.	
409		그래서 이거는 재욱(2조(3))이와 3조의 힘 이예요 .	
410		지난번에 치환을 언급했기 때문에 그걸 언급했던 재욱이에게 1점을 주구요.	
411		3조가 문제를 잘 만들었기 때문에 2점을 주겠습니다.	
412	학생들	와아(박수)	

이 담화는 “무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대한 규범”을 설명하면서 제시한 3차시의 5번째 에피소드와 연결된다. 3차시 수업에서 객체화 되었던 “치환”이 학생들의 문제 만들기 과정에서 활용되면서 참여에

영향을 미친 것을 보여준다.

386번의 담화는 “치환”은 선행 학습내용이기 때문에 아직 교실에서 학급에서 사용할 수 없다는 학생의 의견과 지난 시간의 학습했다는 387번의 담화 아래 암묵적으로 “수학교실에서 논의 될 만한 내용이 무엇인지 대한 규범”을 형성해 가는 과정이라 할 수 있다. 그리고 교사의 412번 담화는 “칭찬 및 상점”으로 학생들이 학급에서 사용할 수 있는 수학적 아이디어는 무엇인지에 대해 정확한 가이드를 제시한다. 즉, 학급에서 논의되었거나 과거에 배운 내용만이 학급에서 논의된 다는 점이다.

수학교실에 논의 될 만한 내용이 무엇인지에 대한 규범은 한국의 수석교사의 신념이 강하게 반영되어 나타난 결과라고 볼 수 있다. 수석교사는 선행학습이 폐해의 극복을 위해 학교수업만으로 충분하다는 학생들에게 신념을 길러 주기위해 노력한다. 아래 인터뷰는 수업 관찰이 진행되는 과정에서 있었던 교사의 인터뷰의 내용이다.

수석교사: 아무것도 배워오지 않은 아이들이, 선행을 하지 않아야 된다는 것, 사교육 하지 않게 하겠다는 것이 제 기조예요. (…) (선행학습을 하고 수업에 오면) 오히려 자기 잘났다고 수업을 방해하는 요소가 많죠. 혼자 대답해 버리고 막. 그런 부작용을 최소화 하고, 학원가지 않고서도 수업할 수 있다는 자신감을 갖게 하고, 학원을 갔다 와도 도움이 안 된다고 느껴야 사교육이 없어지거든요.

한국의 사교육은 공교육의 모습을 왜곡시키고, 정상화를 저해하는 기형적인 모습을 띄고 있다. 그리고 수학 학습을 위한 사교육이 이런 기형적인 모습을 띄게 하는데 가장 많은 역할을 하고 있다는 점을 부인하기는 어렵다. 수석교사는 사교육을 통해 학생들의 예습이 비일비재한 상황에서 공교육에서 학교 수학이 정상화되기 쉽지 않은 문제로 지적하며, 그녀는 그것을 극복하는 것이 수학교사의 역할이라고 보았다.

다음은 같은 에피소드에서 나타난 담화이다. 각 조 학생들은 조별 논의를 통해 각 조의 문제를 만들어 제출하였고, 1조의 문제와 그 문제가 교실에서 다루어지는 상황에 대한 발췌문이다.

<표 V-15> 무엇이 수학교실에서 논의 될 만한 내용인지에 대한 규범: 4-E11(2)

수업 차시: 4 완전제곱식으로 인수분해 하기_심화			
에피소드 11: 모둠별로 문제를 만들고 그 문제를 해결하기			
과제: 1조의 문제 “$ab-a+b-2=0$을 만족하는 정수 a, b에 대해서 순서쌍 (a,b)를 모두 구하시오.”			
	화자	담화	행동
344	학생	윤호(1조(1))너무 어려워	
345	선생님	1조의 문제를 붙이겠습니다.	칠판에 1조 문제를 붙인다.
346	학생	아 진짜 순서쌍 까지 넣냐	
347	선생님	잠깐 순서쌍이야 1학년 중1 용어니까 이 정도는 용서 할 수 있어.	
348		이런 꼴의 문제를 선생님과 같이 배워본 적이 있나요 없나요?	
349	학생들	없어요	
350	선생님	선생님과 같이 다루지 않은 유형에 대해서 이렇게 나와 버리면 학원 갔다 온 친구만 유리하지.	
351		잠깐잠깐 이런 문제를 나랑 다음에 다뤘다 그러면 그 다음에 응용문제 제시 할게요.	

수학 교실에서 선행학습을 하고 와서 내용을 이미 알고, 과정보다 결과를 먼저 발언하며, 수업을 방해하거나 이러한 학생을 중심으로 수업이 진행되는 경우가 많다. 이럴 때, 수업에서 주된 권력을 가지게 되는 것은 학업 성취가 우수한 학생이 되기 쉽다. 위와 같이 수학교실에서 논의할 수 있는 내용이 무엇인지에 대한 규범은 교실 내의 권력관계를 조절하는 역할을 하기도 한다.

라. 문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범

문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범은 수학 문제해결 과정이나 증명을 수학 용어나 기호, 표 등을 이용하여 어떻게 수학적으로 표현할 것인가에 대한 것이다. 앞서 수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법은 수학적 의사소통의 입장에서 말하기에 초점이 있다면, 이 규범은 쓰기와 관련되어 있다.

수석교사의 수업에 총 다섯 번에 에피소드에서 나타났다. 아래 표는 그 에피소드가 어떻게 분포되어 있는지를 나타낸다.

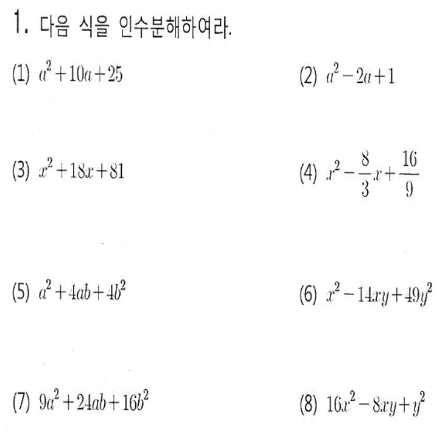
<표 V-16> 수석교사 수업에서 나타난 '문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범' 차시별 분포

사회수학적 규범	한국 수석교사의 교실 수업									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	계
문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범			1※	1				2	1	5

(※ 표시는 본문에서 발췌한 에피소드를 나타냄)

앞서 무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대한 규범을 설명하면서 수학적 문제해결 과정을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범이 동시에 발현한 4차시 10번째 에피소드의 담화를 제시하였다. 그 에피소드에서는 교사의 설명에 의해 학생의 풀이에서 써야 할 부분과 쓰지 않아야 할 부분을 명확하게 구분되었다.

명확하게 제시하는 것이 아니라 수업 활동 안에서 자연스럽게 문제해결과정을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범을 형성하기도 하였다.



1. 다음 식을 인수분해하여라.

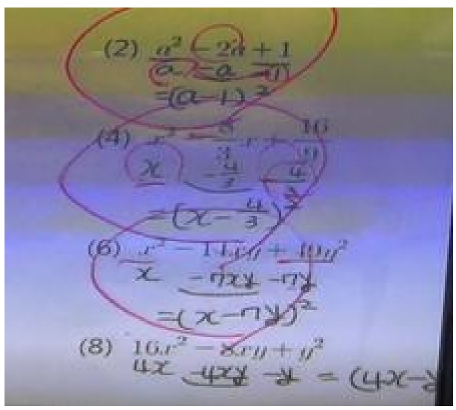
(1) $a^2+10a+25$ (2) a^2-2a+1

(3) $x^2+18x+81$ (4) $x^2-\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}$

(5) $a^2+4ab+4b^2$ (6) $x^2-14xy+49y^2$

(7) $9a^2+24ab+16b^2$ (8) $16x^2-8xy+y^2$

[그림 V-7] 활동지 문제



[그림 V-8] 활동지에 적은 5조 학생 풀이

다음 상황은 3차시 수업에서 완전제곱식을 이용하여 인수분해 하는 예제를 해결 과정에서 발생한 것이다. 학생들은 짝과 함께 예제를 해결하고, 선생님은 짝이 해결한 것을 실물화상기로 반 학생들이 볼 수 있게 하면서 어떤 풀이가 잘된 것 인지를 설명한다. [그림 V-8]은 실물 화상기를 통해 공유한 5조 학생의 풀이의 예이다.

<표 V-17> 문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범: 3-E9

수업 차시: 3 완전제곱식으로 인수분해 하기_기초			
에피소드 9: 짝 짝과 함께 푼 문제(활동지)를 전체 학생들과 함께 확인하기			
과제: 완전제곱식으로 인수분해하는 여러 가지 문제			
	화자	담화	행동
570	선생님	네 이제 아름다운 답한 커플을 뽑겠습니다.	
571		우리 두 사람이 답도 똑같고 너무 답안 자체가 아름다워	
572		어 아까 먼저 했었죠.	
573		들고 나오세요.	
	4조(1,2)	(자신의 활동지를 선생님에게 제출한다)	
574	선생님	펜 드시고.	4조의 풀이를 실물화상기에 올린다
575	선생님	one 회전.Two 여기 봅시다.	
576		화면 이친구가 a^2 이구나 5^2이구나 곱해서 $5a$가 두 배 있구나 확인 하시고	문제(1) $a^2-50a+25$
577		$(a+5a)^2$잘했죠.	
578		근데 는(=)붙 이세요.	
579		잘했죠?	
580		인정	
581		하나 더 들어가 있으면 좋은 게 있다.	
582		애가 a^2이고 1^2인데 애가 1인지 -1인지 알아 몰라	문(2) a^2-2a+1
583	학생들	몰라요	학생들이 손을 든다
584		그러니 누구보고 판단해?	
585		여기 다가 -1이 라고 판단해.	
586		이거 약간 아쉬운데 딴 커플.	
587		오 요기로(1조) 할게요.	
588		아 여기여기 여기는 뭔가 아쉬운 게 있는데	1조 풀이를 실물화상기에 올린다
589		앞으로 a^2+b^2 나왔어	
590		그렇다고 완전제곱식 되나요?	
591		이거를 곱한 ab의 두 배가 가운데 있을 때 만 완전제곱식이 돼죠.	
592		그러니까 이거 판단하는 것도 연습 하셔야 돼요.	

593		이것만 하면 안돼요.	
594		다른 답안 좋아 좋아 미정이랑(5조)	5조 풀이를 실물화 상기에 올린다.
595		완벽하게 답안지 구성이 돼있어요.	
596		보세요.	
597		얘는 a랑 5랑 곱해서 5a 두 배가 여기 있나 확인 하고 있죠.	문제(1)
598		이렇게 하시라는 거예요.	
599		a랑 1인데 곱했더니 -2가 나오니까 -1 -a의 두 배 확인 하고 했구요.	문제(2)
600		여기도 x^2, 9^2 $9x$의 두배가 여기 있죠.	문제(3) $x^2+18x+81$
601		여기는 x^2, $\left(\frac{-4}{3}\right)^2$. 곱하니까 두 배	문제(4) $x^2-\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}$
602		애 때문에 여기가 -가 돼는 거야.	
603		그러니까 $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2$ 됐죠.	
604		정말 잘했는데	

574번째, 587번째, 594번째 교사의 담화 이후 실물화상기 위로 올라오는 학생들의 풀이는 수학적 문제해결을 표현하는 방법이 무엇인지에 대한 사회수학적 규범을 형성하는데 영향을 주는 객체화된 것으로 볼 수 있다.

581번째 교사의 설명은 4조 학생의 문제해결 과정을 설명하는 것에 한계가 있음을 직접적으로 설명하는 대목이며, 동시에 학생들에게 자신의 설명에 동의를 구하는 상황이다. 583번째 대화에서 학생들이 교사의 설명에 동의를 표시하면서, 지금 실물화상기에 올라가 있는 4조의 학생이 기록한 풀이에 한계 있으며, 문제해결을 어떻게 써야 하는 지에 대한 의미를 협상해 가는 과정에 있다고 볼 수 있다. 그 과정에서 교사의 설명과 학생의 동의라는 명시적인 의미협상의 과정이 드러남을 확인 할 수 있다. 반면 593번째 교사의 대화는 학생들에게 직접적으로 1조 학생이 써낸 것이 충분하지 않음을 직접 설명하며, 다른 조의 풀이를 요청하면서 명시적인 협상 과정보다는 교사의 설명 또는 제안에 의해 규범이 형성되는 것으로 분석할 수 있다.

교사는 학생들의 풀이를 보고, 아쉬운 점이 발생했을 때, 즉 정확한 근거가 표현되어 있지 않거나 확인해야 할 절차를 드러내 주지 않은 풀이

가 발생했을 때, 다른 조의 풀이를 요청하고 하였으며, 이 에피소드에서 학생들이 보게 되는 조별 풀이는 총 3가지 형태였고, 이 풀이들이 어떤 근거 때문에 교사에 의해서 풀이를 잘 적은 것으로 채택되지 않게 되었는지를 판단하게 된다. 이 과정을 통해서 학생들은 어떻게 수학적 문제를 해결한 결과를 표현할 것인지에 대한 규범을 학습하게 된다.

마. 무엇이 수학적으로 다른 아이디어로 여겨지는지에 대한 규범

특정한 수학적 아이디어와 풀이 절차를 다른 수학적 아이디어와 비교하여 그 차이와 특징 등을 논의하거나 설명하는 과정에서 이 사회수학적 규범이 나타난다. 다음 표는 수석교사의 수업에서 이 규범이 나타난 수업을 표시한 것이다.

<표 V-18> 수석교사 수업에서 나타난 ‘무엇이 수학적으로 다른 아이디어로 여겨지는지에 대한 규범’ 차시별 분포

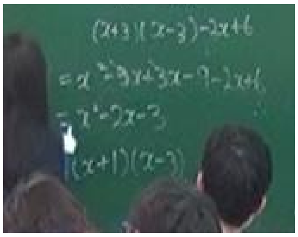
사회수학적 규범	한국 수석교사의 교실 수업									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	계
무엇이 수학적으로 다른 아이디어로 여겨지는지에 대한 규범			1※	1			2			4

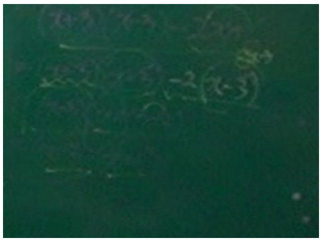
(※ 표시는 본문에서 발췌한 에피소드를 나타냄)

학생들의 문제해결 전략이 서로 다른 풀이를 제공했을 때, 이 규범은 발생한다. 앞서 “무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대한 규범”을 설명하기 위해 발췌한 4차시 10번째 에피소드에서도 이 규범이 발생한다. 두 문제해결 과정 중에서 더 효율적인과 그렇지 않은 것을 구분하기 위해서는 우선 두 문제해결 전략이 다르다는 것이 전제되어야 하기 때문이다.

다음 상황은 7차시 수업에서 발생한 담화이며, 두 학생이 활동지에 제시되어 있는 인수분해 문제를 칠판에 나와 해결하였다. 두 학생이 $(x+3)(x-3)-2x+6$를 인수분해하는 문제를 어떻게 해결하였는지 살펴보자. 오른쪽 칠판에 적혀 있는 학생의 풀이는 가독성을 위해 다시 기록

하였다





$(x+3)(x-3)-2x+6$
$=(x+3)(x-3)-2(x-3)$
$=(x-3)(x+3-2)$
$=(x-3)(x+1)$

[그림 V-9] 학생 풀이1　　　　[그림 V-10] 학생 풀이 2

<표 V-19> 무엇이 수학적으로 다른 아이디어로 여겨지는지에 대한 규범: 7-E4

수업: 7차시 $acx^2+(ad+bc)x+bd$꼴의 다항식의 인수분해 하기			
에피소드 4: 학생들이 활동지 문제를 칠판에 해결하고 발표하기			
과제: $(x+3)(x-3)-2x+6$을 인수분해 하여라.			
	화자	담화	행동
110	선생님	요기 지금 애네 때메 인수분해 안된다고 파악해서 얘를 전개하기로 마음먹었죠?	왼쪽 풀이 설명
111		근데 이 친구는 사실은 합차 공식을 쓴게 아니고, 아주 성실하게 분배법칙을 쓴 거지.	
(…)			
116	선생님	아까 영주의 풀이를 보고 어떤 친구가. 오~ 영주 좋다. 이런 말을 감탄사를 한번 뱉더라구요.	오른쪽 풀이 설명
117		얘는 이렇게 본 순간 이걸 풀 생각을 안했어.	
118		다른 생각을 한 거야.	
119		얘를 $-2x+6$ 공통인수 보이니?	

왼쪽의 풀이는 다항식을 모두 전개하고 정리하여 인수분해를 하는 전략을 취했고, 오른쪽 풀이에서는 주어진 다항식에서 공통인수를 찾아 해결한 것이다. 위 담화는 왼쪽의 학생은 자신의 풀이를 설명한 이후에 진행 된 교사의 설명이다. 위의 담화는 교사와 학생들은 풀이의 전략적 차이를 공유하고 있음을 보여준다.

바. 어떤 문제가 더 좋은 문제인지에 대한 규범

수업 중 다루어지는 문제나 학생들에 의해 만들어진 문제가 어떤 의미에서 수학적으로 긍정적인가를 판단하거나 설명하는 경우, 이 규범이 나타나는 것으로 분석하였다. 수석교사의 수업에서 총 4번의 에피소드에서 나타났으며, 수업 차시별 분포는 아래와 같다.

<표 V-20> 수석교사 수업에서 나타난 ‘어떤 문제가 더 좋은 문제인지에 대한 규범’ 차시별 분포

사회수학적 규범	한국 수석교사의 교실 수업									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	계
어떤 문제가 더 좋은 문제인지에 대한 규범	1			1※	2					4

(※ 표시는 본문에서 발췌한 에피소드를 나타냄)

다음에 발췌한 에피소드는 4차시 11번째 에피소드이다. 이 에피소드는 앞서 “수학교실에서 논의 될 만한 내용이 무엇인지에 대한 규범”을 설명하면서 발췌한 에피소드이기도 하다. “수학교실에서 논의 될 만한 내용이 무엇인지에 대한 규범”역시 한국의 수석교사의 수업에서만 발현된 규범이었으며, 실제 이러한 규범이 일어난 교실 담화는 어떻게 진행되었는지 살펴보자.

이 에피소드는 모둠별로 문제 만들기 활동을 한 후, 각 조에서 만들어낸 문제를 전체 학생들과 함께 해결한다. 교사는 각 조에서 만들어진 문제가 좋은 문제일 경우에, 조 마다 1점의 상점을 주었다. 4조는 “$2a^2b^2(x-1)+4a(1-x)$를 인수분해 하여라.”라는 문제를 만들었고, 이것을 전체 학생들과 공유하는 과정에서 다음과 같은 담화가 발생하였다.

<표 V-21> 어떤 문제가 더 좋은 문제인지에 대한 규범: 4-E11

수업: 4차시 완전제곱식으로 인수분해 하기_기초			
에피소드 11: 모둠별로 문제 만들고 그 문제를 해결하기			
과제: (4조 문제) $2a^2b^2(x-1)+4a(1-x)$를 인수분해 하여라.			
	화자	담화	행동
383	선생님	자기 조 문제를 본 다음에 어려운 문제가 좋은 문제 아닌 거 알지.	
384		선생님이 수업시간에 이 내용을 다루었는데 그 때 어느 부분인가 주의 하지 않으면 실수가 있을 법한 그런 문제가 좋은 거야.	
385		알겠죠.	
386		안 배운 거 고등학교 학원 문제 내면 안 돼.	
		(…)	
413		이 4조 문제의 핵심 출제자.	
414		선생님의 마음을 읽어야 해.	
415		이 사람은 뭐가 함정일거라고 생각하고 문제를 냈을까요?	
416	학생들	1조	
417	학생들	5조	
418	선생님	어디 이야기 해봐	
419	1조(5)	$x-1$하고 $1-x$ 저거를 묶어 내는데 부호를 바꿀려고	
420	선생님	어. 부호를 똑같지 않고 부호를 바꿔주는 거.	
421		그거 말고 또. 5조	
422	5조(2)	$2a$가 공통인수라고	
423	선생님	그것만 있는게 아니라 이 속에 공통인수까지 남기지 않고 다 묶어 내는 거 두 가지가 포커스 입니다.	
424		5조에게 1점을 주구요. 1조에게	
		(…)	
441		끝 문제 굉장히 단순할 것 같지만 굉장히 잘했어요.	
442		4조에게 2점	

교사의 담화 383번~386번은 이 수학교실에서 좋은 문제가 되는 조건을 설명한다. 동시에 이 교실에서 논의 할 수 있는 수학내용이 무엇인지에 대한 설명이기도 하다. 4조는 공통인수의 부호와 공통인수를 모두 찾아야 하는 두 가지를 고려하며 문제를 만들었고, 교사는 문제를 초점을 찾

아낸 1조와 5조에게 상점을 문제를 “잘” 만들어낸 4조에게 2점의 상점을 부여한다.

이 수학교실에서는 조별 상점과 개인 스티커를 통하여 학생들의 수업 참여를 강화하고, 학생에게 상과 벌을 제공하고 있다. 개인 스티커는 학생의 참여가 교실 수업을 위해 기여를 하였을 때, 제공된다. 조별 상점은 각 조의 학생들이 수업시간에 발표를 할 때, 조에게 상점을 준다. 이 결과는 모두 수행평가에 반영되고, 이 교실의 학생들은 개인적으로 스티커를 받는 것과 조별로 상점을 모으는 것이 일종의 게임처럼 여겨져 상점을 받기 위해 수업에 적극 참여하려는 모습을 보인다. 위의 담화에서 문제의 초점을 알아낸 1조(5)학생과 5조(2)학생은 조를 대표하여 상점을 얻어낸 것이다.

이러한 맥락에서 4조에게 상점 2점을 부여한 것은 이 문제가 다른 조에서 만들어진 문제보다 더 좋은 문제임을 보여준다. 담화 384번은 “수업시간에 다룬 내용”에서 출제된 문제, “주의 하지 않으면 실수가 있을 법한”문제가 좋은 문제로 논의 되며, 실제 4조의 문제로 좋은 문제의 형태가 객체화 되어 나타난 것이다.

사. 수학적 표현을 어떻게 쓰는 것이 좋은지에 대한 규범

수학적 표현의 논리적 적합성이 아니라 의사소통의 효율성을 높일 수 있는 표현 방법이나 수학적으로 더 통용되는 표현해 대해 논의하거나 설명하는 경우 “수학적 표현을 어떻게 쓰는 것이 좋은지에 대한 규범”으로 분석되었다.

<표 V-22> 수석교사 수업에서 나타난 '수학적 표현을 어떻게 쓰는 것이 좋은지에 대한 규범' 차시별 분포

사회수학적 규범	한국 수석교사의 교실 수업									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	계
수학적 표현을 어떻게 쓰는 것이 좋은지에 대한 규범			1※		1					2

(※ 표시는 본문에서 발췌한 에피소드를 나타냄)

다음은 3차시 수업에서 완전제곱식으로 인수분해 하는 수업에서 발생한 담화이다. 이 에피소드에서 교사는 두 번에 걸쳐 수학적으로 통용되는 표현에 대해서 설명하고 있다.

<표 V-23> 수학적 표현을 어떻게 쓰는 것이 좋은지에 대한 규범: 3-E7

수업: 3차시 완전제곱식으로 인수분해 하기_기초			
에피소드 7: 완전제곱식으로 인수분해 하기 예제문제 해결하기			
과제: 여러 가지 완전제곱식 문제			
	화자	담화	행동
501	선생님	곱하면 이거 나오고 두배 맞니	
502		그러니까 $(-x-6y)^2$이라 해도 틀린 건 없죠.	
503		그러나 여러분은 기억 하십시오.	
504		우리가 3^2이 좋아 $(-3)^2$이 좋아?	
505	학생들	3^2	
$\boxed{506}$	선생님	그러니까 이렇게 있을 때는 제곱하면 어차피 -는 제곱하다 사라지게 되기 때문에 이렇게 쓰는 방법이 좋은 거예요.	
507		이것이 틀렸다고는 할 수 없지만 이렇게 하십시오.	
(…)			
531	선생님	선생님 제가 묻겠죠.	
532		여기 $\left(-2a+\frac{1}{3}b\right)^2$ 이렇게 하면 안 돼나요?	
533		됩니다.	
534		상관없어요.	
$\boxed{535}$		그러나 앞에 쓰는 항이 +쪽으로 하는 것이 좋으니까 이런 식으로 풉시다.	

인수분해하여 얻어낸 결과인 두 식 $(-x-6y)^2$와 $\left(-2a+\frac{1}{3}b\right)^2$은 수학적으로 오류가 있는 것은 아니지만, 이 교실에서는 이러한 표현보다, 제곱식의 괄호 안에 첫 번째 계수의 부호가 양수가 되게 표현하는 것을 제안한다. 처음 학생이 인수분해 하여 얻어 낸 식이 $(-x-6y)^2$이었던 것으로 보면, 이러한 표현이 교실 안에서 이미 공유되고 있었던 것은 아님을 알 수 있으며 교사의 설명을 통해 통용되는 수학적 표현에 대하여 점진적으로 알아가는 상황이라 할 수 있다.

2. 싱가포르 리드교사의 수업에서 나타난 사회수학적 규범

싱가포르의 리드교사의 총 6차시의 수업동안 발현된 사회수학적 규범은 총 6개로 분석되었다. 그것은 '수학적으로 수용 가능한 설명에 대한 규범'. '문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범', '무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대한 규범', '수학적으로 다른 아이디어에 대한 규범', '수학적 표현을 어떻게 쓰는 것이 좋은지에 대한 규범', 그리고 '문제해결을 위해 어떻게 전략을 세울 것인지에 대한 규범'에 대한 규범이다. 그 중에서 '문제해결을 위해 어떻게 전략을 세울 것인지에 대한 규범'은 전체의 약 40%를 차지하는 것으로 가장 많이 등장하는 사회수학적 규범으로 분석되었으며, 리드교사의 수업에서만 나타나는 사회수학적 규범으로 나타났다.

가. 수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범

수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범은 수학적 해법을 설명하거나 발표 할 때, 청자가 이를 수용하기 위해 설명이 갖춰야

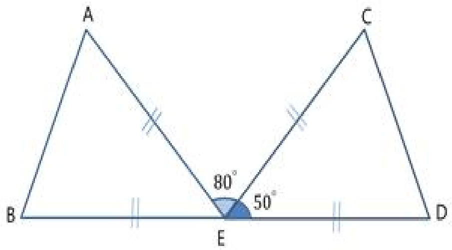
할 요건이나 특징에 대해 언급하거나 교실에서 기대되는 수학적 의사소통 방법에 대해 논의하거나 설명하는 경우 코딩되었다. 싱가포르의 리드 교사의 수업에서 총 7번의 에피소드 안에서 발현되었다. 리드교사의 수학교실에서 나타난 사회수학적 규범 중에 약 25.93%라는 높은 비중을 차지한다. 7번의 에피소드는 다음과 같이 분포 하였다.

<표 V-24> 리드교사 수업에서 나타난 '수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범' 차시별 분포

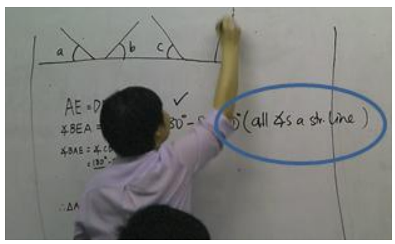
사회수학적 규범	싱가포르 리드교사의 교실 수업						
	1	2	3	4	5	6	계
수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범	4※	2				1※	7

(※ 표시는 본문에서 발췌한 에피소드를 나타냄)

다음 에피소드는 삼각형의 합동조건을 이용하여 증명을 학습하는 1일차 수업에서 발췌된 내용이다. 4번째 에피소드는 △BEA와 △DEC가 합동임을 보이는 아래의 과제에 대한 학생의 풀이를 교사가 설명한다.



[그림 V-11] 수업과제



[그림 V-12] 교사의 판서

학생의 풀이를 보면, 위 그림에서 ∠BEA를 구하기 위하여, 직선위의 한 점에서 인접한 모든 각의 합이 180° 임을 이용하였다. 따라서 학생은 "∠BEA=180° −80° −50° =50° "라고 작성한 것이다. 그러나 학생이 풀이에는 그 근거가 명확하게 작성되어 있지 않았고, 교사는 이 식이 나오게

된 근거를 물었으며, Amin는 그것을 “All angles on the straight line”이라고 말했고, 교사는 그 설명에 따라 "all ∡s a str. line"이라고 기록하면서 아래의 담화가 시작된다.21)

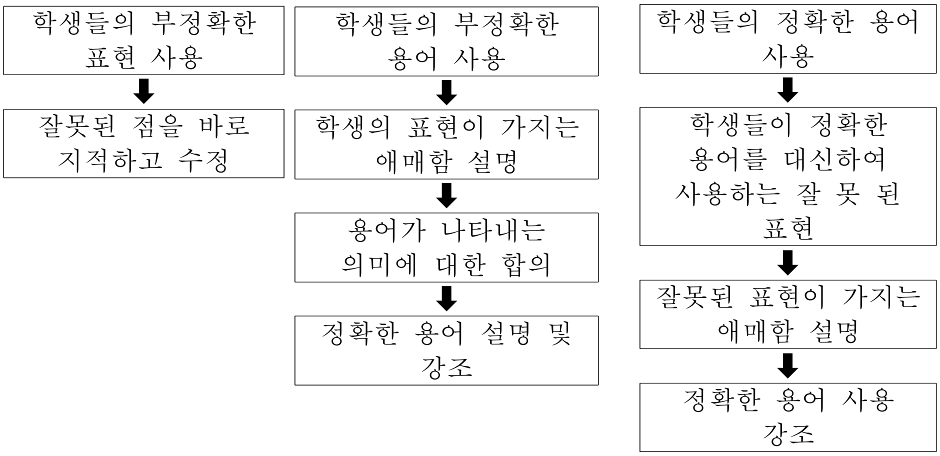
<표 V-25> 수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범: 1-E4

수업: 1차시 두 삼각형이 합동인지 아닌지 결정하여라.			
에피소드 4: 학생의 풀이에 대한 교사의 설명			
과제: 두 삼각형 △BEA와 △DEC가 합동임을 증명하여라.			
	화자	담화	행동
317	Amin	All angles on the straight line	
318	T	Angles, All angles on the straight line.	판서
319		All angles on the straight line.	
320		So, Amin, I have a straight line.	직선을 그린다.
321		One angle on this straight line.	각a를 그린다.
322		Two angles on this straight line.	각b를 그린다.
323		Another angle on this straight line.	각c를 그린다.
324		Another angle on this straight line.	각d를 그린다.
325	Amin	**at a point**	
326	T	All angles at a point.	
327		How do you say?	
328	Ss	Adjacent	
329	T	**It is actually called adjacent angles on a straight line.**	
330		So why is it adjacent?	
331		Because, they are all side by side.	
332		You see? Can you see? Right? And its on a straight line.	
333		**It is important.**	
334		**This word is important.**	
335		You just say angles of straight line, angles of straight line.	
336		**You must say adjacent on a straight line.**	

21) 담화문에 등장하는 학생의 이름은 모두 가명처리 되었다. 그리고 화자로서 교사의 T로 학생들은 Ss로 표시하였다.

위 에피소드는 ″Adjacency angles on a straight line″이라는 평행선에서의 각의 성질을 나타내는 정확한 용어의 사용을 강조하는 대목이다. 교사는 질문에 Amin은 317번 담화에서 “all angles on a straight line” 이라는 부정확한 표현을 사용하면서 교실에 참여한다. 이때 교사는 318번째 담화와 같이 학생이 한 응답을 곱씹듯 두 번 반복하고 그것을 칠판에 적는다. 이것은 칠판의 기록과 함께 ″all ∡s a str. line″이 객체화 되어 나타남을 보여준다. 320번~324번의 담화에서 교사는 부정확한 표현이 가지는 의미를 그림을 이용하여 설명 한다. 교사의 그림 역시 학생이 “adjacency angles on a straight line″이라는 정확한 용어를 사용하면서 교실 의사소통에 참여하도록 하는 객체화된 것으로 볼 수 있다

교사는 각a, 각b, 각c, 각d를 그리며, $\angle a+\angle b+\angle c+\angle d=180^{\circ}$이 되는 것인지 물었다. 학생들은 이러한 교사의 설명 이후에 자신의 표현을 좀 더 명확하게 하기 위하여, 325번 담화에서 ″at a point″라며 자신의 설명에 보충을 한다. 학생의 설명을 받아 들여, 교사는 ″All angels at a point″ 라고 가능한 애매한 상황을 극복하여 학생과 교사가 의미하는 바가 무엇인지 합의에 이른다. 그리고 그것이 수학적으로 “adjacent angles on a straight line”라 표현해야 함을 강조하면서 에피소드가 마무리 된다.



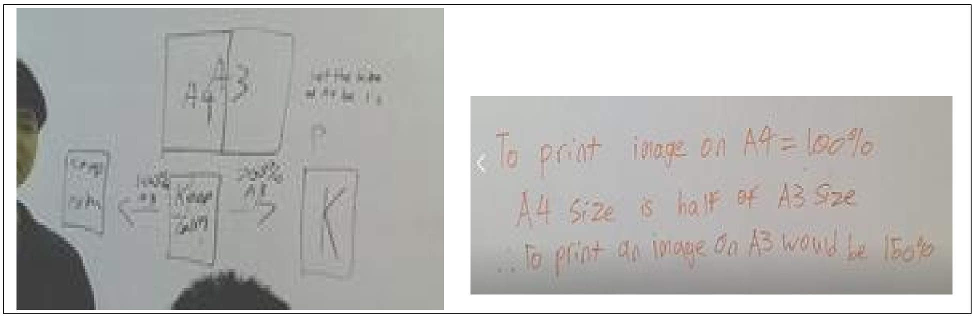
[그림 V-13] 정확한 용어 사용을 강조하기 위한 교수 과정

수학적 용어를 정확하게 사용하는 규범을 형성하는 과정은 세 가지 형태로 나타났다. 두 가지 경우는 학생들이 잘못된 표현을 사용하면서 발생하고, 나머지 하나는 학생들이 자주 할 수 있는 오류를 지적하면서 나타났다. 위의 에피소드는 두 번째 상황에서 발생한 것이다.

또한 교사는 수학적 용어를 엄밀하게 사용하는 것을 강조하면서, 동시에 학생들이 수학적으로 의사소통 하려고 할 때, 합의된 의미를 정확하게 상기시키기 위해서 용어를 강조하기도 한다. 이러한 교사의 의도는 수학적으로 엄격하고 정확하게 표현을 하는 것을 통해서 학생들에게 그 정의의 개념을 이해시키는데, 또는 자신의 사고과정을 명확하게 하는데 도움을 준다고 보고 있기 때문인 것으로 해석된다.

수학 용어를 엄밀하고 정확하게 사용해야 한다는 것과 함께 수학적으로 수용 가능한 설명은 논리적인 근거가 있어야 함을 보여주는 대표적인 에피소드는 6차시 7번째 에피소드에서 나타났다. 6차시의 마지막 에피소드인 이 에피소드는 지난 5차시 수업에서 제시한 실생활 문제를 해결하는 상황이다. 리드교사는 지난 시간 마지막에 “A4에 쓰여진 그림을 확대복사 하려고 한다. A4용지의 넓이가 2배가 되는 A3용지로 복사하기 위해서는 복사지에 어떤 숫자를 눌러야 할까?” 라는 문제를 제시하였다.

그리고 이 문제를 두 학생이 칠판에 다음과 같이 해결하였다.



[그림 V-14] A4 확대 문제에 대한 학생들의 풀이

위의 두 풀이는 모두 수학적으로 타당한 근거를 제시하지 못한 채 마무리 됐다. 왼쪽의 풀이는 200% 확대해야 한다는 결론을 오른쪽 풀이는 150%를 확대해야 한다는 결론을 내렸지만 두 풀이에는 수학적인 근거가 제시되어 있지 않는다. 교사는 복사기에 눌러야 할 번호를 “magic number”라 부르면, 학생들의 풀이에 다음과 같이 설명을 보충한다.

<표 V-26> 수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범: 6-E7

수업: 6차시 닮은 입체도형을 사용하여 문제해결하기			
에피소드 7: 전 차시에 제시한 실생활 문제 해결하기			
과제: A4용지를 A3용지로 확대하기 위해서 복사기에 눌러야 하는 숫자는 무엇일까?			
	화자	담화	행동
480	T	When you make up and find out, tell me one-day what is the magic number.	
481		But the thing is you can explain why it is the magic number.	
482		You explain why it is the magic number	
(…)			
485		Why is it that using 200% I will not be able to make the A4 size into the A3 size.	

남은 수업 시간이 얼마 남지 않은 마지막 에피소드였기 때문에, 학생

들에게 자신의 풀이를 설명할 시간은 주어지지 않았다. 또한 교사는 이 문제의 해결 방법을 설명하는 것보다 학생들의 풀이를 보고 왜 그렇게 생각하게 되었는지를 물었다. 그리고 리드교사는 위의 두 풀이는 수학적으로 수용 가능하지 않음을 표현하면서 수업은 마무리 되었다.

나. 문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범

문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범은 수학 문제해결 과정이나 증명을 수학 용어나 기호, 표 등을 이용하여 어떻게 수학적으로 표현할 것인가에 대한 것이다. 앞서 수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법은 수학적 의사소통의 입장에서 말하기에 초점이 있다면, 이 규범은 쓰기와 관련되어 있다. 리드교사의 수업에 총 일곱 번에 에피소드에서 나타났으며, 이는 이 수학교실에서 발현된 사회수학적 규범의 약 18.52%에 해당한다. 아래 표는 그 에피소드가 어떻게 분포되어 있는지를 나타낸다.

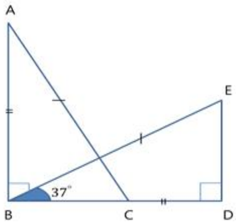
<표 V-27> 리드교사 수업에서 나타난 '문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범' 차시별 분포

사회수학적 규범	싱가포르 리드교사의 교실 수업						
	1	2	3	4	5	6	계
문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범	2※	2※				1	7

(※ 표시는 본문에서 발췌한 에피소드를 나타냄)

합동과 닮음이라는 단원에서 합동조건과 닮음 조건을 정확하게 사용하여 증명하는 것을 학습하고 있기 때문에, 많은 증명 쓰기와 관련되는 이 규범이 빈번하게 발생하였다.

다음은 두 삼각형이 합동인지 아닌지를 탐구하는 1차시 수업에서 발생한 담화이다. 2번째 에피소드에서는 SAS 합동조건을 이용하여 삼각형이 합동임을 보이는 다음과 같은 과제를 해결하고 있다.

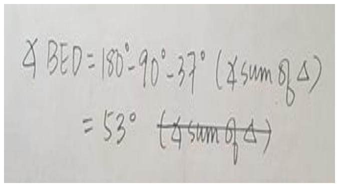


Qusetion 1

(1) Find two congruent triangles

(2) Find ∠BED

(3) Find ∠ACB



[그림 V-15] 수업 과제와 교사의 판서

리드교사는 오른쪽과 같이 각 BED를 찾기 위하여 판서를 하였다. 이 때, 학생 Amin은 교사가 쓴 ″180° −90° −37°″를 대신하여 더 간단하게 ″90° −37°″로 써도 되는 것이 아닌지 물었다. 다음 담화는 이 학생에 대한 교사의 설명이다.

<표 V-28> 문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범: 1-E2

수업: 1차시 합동인 두 삼각형을 판별하기			
에피소드 2: SAS 조건을 활용하여 합동인 삼각형 찾기			
과제: ∠BED의 크기를 찾아라.			
	화자	담화	행동
175	T	Find your BED	
176	S	equals to	
177	TG	180-90-37	
178	T	What is your reason?	
		(…)	
191	T	Now let's talk about what Amin has said.	
192		Okay, firstly is this thing about proving?	
193		What is the property that we are making use of?	
194		I know Amin is saying that it's also okay to write 180-90, 180-90 is 90.	
195		**So why not show write like this?**	
196	S	**We have to show that it is angle sum of triangle**	
197		(Laughing)	
198	T	Right, she is right.	
199		You have to show because if you are asked to why 90 degrees minus 37?	
200		Why 90 degrees?	
201		Why you cannot explain?	

202		…but you see	
203		I am showing you that I am making use of this property.	
204		What property is that?	
205		What property of the triangles is that?	
206		The angle sum.	
207		You see it's a kind of sum.	
208		What kind of sum are we talking about?	
209		It's the angle sum.	
210		Please don't come and tell me in future.	
211		Anyone of you here who writes there a son as the sum is 180 degree of triangles, angles whatever… or all any other of them, I will mark you wrong, because **I only accept this "angle sum of a triangle"**	
		(…)	
226		Do you know what's the purpose of writing a bracket and then the reason?	
227	Ss	Explain.	
228	T	Explain, very good,	
229		Explain what?	
230		Explain what you are doing now.	
231		So, the thing is: are you explaining how to get 53?	
232	Ss	No.	
233	T	No. I got 53 by subtracting.	
234		But how and why is it that you want to take this and minus this minus this?	
235		Are you explaining?	
236	Ss	Yes.	
237	T	This is your explanation.	
238		Do not any how put your reason anywhere you would like.	
239		Because sometime like you do do do do a ya you just said you must write reasons and forgot to write reasons, and go anywhere and find a spot to write reasons.	
240		You cannot do that your reasons (as what where you explain)	
241		Actually explain.	
242		This explains why you are doing this.	
243		You see, just like here.	
244		How about you've got here.	
245		Because you're explaining how come you know AB is equals to BD.	
246		Agree?	
247		So your bracket where your position of bracket is important because that gives you the reason why you know that?	

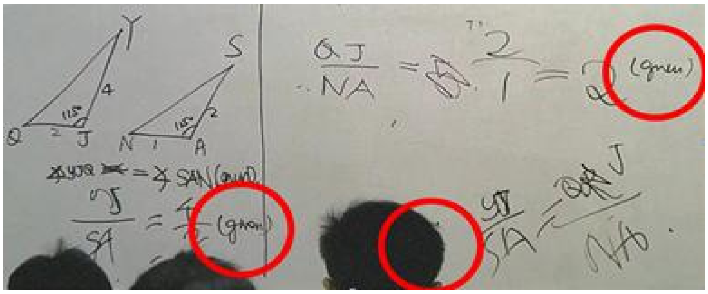
위 에피소드는 증명을 어떻게 쓸 것인지에 대한 규범이 나타난 에피소드이다. Amin의 제안을 교사는 잠시 미뤄두고 각 BED를 찾는 과정을 위 그림과 같이 판서하였다. 195번~203번의 담화는 “angle sum of a triangle″이라는 수학적 근거를 바탕으로 한 결과를 제시해야 함을 설명하면서 Amin의 제안을 받아들일 수 없다는 결론에 이른다. 이 담화는 학생의 제안에 대해서 교사의 설명으로 어떻게 증명을 쓸 것인지에 대한 의미를 협상해 가는 과정을 보여준다. 226번~238번의 담화는 “angle sum of a triangle″이 사용된 그 순간에 그 근거를 제시할 필요가 있음을 설명한다. 위 그림은 “angle sum of a triangle”의 성질이 사용된 순간을 명시적으로 보여주기 위해서 교사에 의해서 기록된 것이다. 교사는 의도적으로 두 번째 줄에서 삼각형의 성질을 작성하고, 그것이 옳은 위치가 아님을 표현하였다. 두 번째 줄의 결과는 첫 번째 줄에서의 빼기를 계산한 결과이며, 첫 번째 줄에서 180°에서 도형에서 주어진 두각을 뺀 것이 삼각형의 성질을 사용하였다는 점을 설명한 것이다.

특히, 위 에피소드는 교사의 설명을 통해 “증명을 쓸 때에는 수학적 근거를 제시하면서 써야하고 동시에 그것이 드러나도록 써야 한다”는 것과 “근거를 정확한 위치에 제시”해야 한다는 객체화된 규칙이 등장함을 확인 할 수 있다. 이때, 이러한 규칙을 만들어낸 교사는 평가와 함께 학생들의 수학적 탐구 참여에 지속적으로 영향을 미친다.

또한 “angle sum of a triangle″이 사용된 그 순간에 그 근거를 제시할 필요가 있음을 설명한다. 위의 그림에서 “angle sum of a triangle”의 성질이 사용된 것은 두 번째 줄이 아니라 첫 번째 줄이다. 교사는 의도적으로 두 번째 줄에서 삼각형의 성질을 작성하고, 그것이 옳은 위치가 아님을 표현하였다. 두 번째 줄의 결과는 첫 번째 줄에서의 빼기를 계산한 결과이며, 첫 번째 줄에서 180°에서 도형에서 주어진 두각을 뺀 것이 삼각형의 성질을 사용하였다는 점을 지적한 것이다.

다음은 2차시 삼각형의 닮음 조건을 쓰는 수업에서 아래와 같이 학생이 작성한 풀이를 교사가 수정하면서 하는 담화이다. △YQJ와 △SNA가 닮음임을 보이는 과제이다. 아래 그림에서 확인할 수 있듯이 문제에서

필요한 조건들이 모두 주어져 있다. 즉, 이 문제는 두 삼각형이 어떤 조건으로 닮음임을 탐구하는 것보다 닮음 조건을 정확하게 사용하고 수학적 증명을 쓰는 것을 학습시키기 위한 목적을 가지고 있다.



[그림 V-16] 학생의 풀이와 교사의 수정

그림에서 표시된 빨간 원 안의 내용은 교사가 수정하면서 작성한 것이고, 학생의 멀리에 가려 보이지 않는 부분은 “Since”라고 적혀 있었고, 후에 교사에 의해 “∴”으로 수정 작성되었다.

<표 V-29> 문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범: 2-E6

수업: 2차시 닮음인 두 삼각형을 증명하기			
에피소드 6: 학생의 풀이를 교사가 설명하기			
과제: 두 삼각형 △YQJ와 △SNA가 닮음임을 증명하여라.			
	화자	담화	행동
233	T	Rest of you, any comment?	
234		Don’t go yet, stand out here.	발표한 학생이 자리에 들어가려 한다.
235		Any comments?	
236		She could inside? You think you could inside?	
237	T	Since these are equal and these are equal. Okay?	$\frac{YJ}{SA}=\frac{QJ}{NA}$ 가리킨다.
238	T	That’s one way you can improve.	
239		Then that you mean of talk about angle and two sides, right?	
240		Or if not, don’t say “since”. “Since” means what is based of this reason.	가운데 빨간 원에 학생이 작성 한 ‘since’를 지운다.
241		So all this about are all your reason.	풀이 앞에 “Since”

			를 쓴다.
242		Angles are equal because it is given.	given을 쓴다.
243		Sorry.	
244		I jump up. Now you did.	
245		I forgot to say something.	
246		When you write down all your ratios, right? You say given.	given을 쓴다.
247		Because of this two lines.	
248		Therefore this two ratios are equal.	"=2"를 지운다.
249		This is in your S and your S. And you have your A.	가운데 원에 ∴를 쓴다.
250		Therefore, triangle YQJ is similar to SNA.	
251		And the test should be SAS test.	

학생이 단숨에 증명과정을 써 내지는 못했지만 SAS닮음 조건을 사용하기 위한 조건들을 모두 정확하게 작성하였다. 그러나 학생의 풀이에는 아직 이 교실에서 기대되는 증명 쓰기에 적합하게 작성되어 있지는 않았던 것으로 보인다. 위의 담화를 전후로 하여 학생의 증명과 수정된 증명을 나타내면 아래와 같다. 오른쪽 빨간 글씨는 교사에 의해 수정된 것을 나타낸다.

<표 V-30> 학생과 교사의 수학적 증명 쓰기 비교

학생의 증명	교사에 의해 수정된 증명
$\measuredangle YJQ = \measuredangle SAN$ (given)	Since $\measuredangle YJQ = \measuredangle SAN$ (given)
$\frac{YJ}{SA} = \frac{4}{2} = 2$	$\frac{YJ}{SA} = \frac{4}{2} = 2$ (given)
$\frac{QJ}{NA} = \frac{2}{1} = 2$	$\frac{QJ}{NA} = \frac{2}{1} = 2$ (given)
Since $\frac{YJ}{SA} = \frac{QY}{NA} = 2$	$\therefore \frac{YJ}{SA} = \frac{QY}{NA}$
ΔYQJ is similar to ΔSNA (SAS test)	ΔYQJ is similar to ΔSNA (SAS test)

(싱가포르에서는 닮음을 나타내는 기호를 학습하지 않는다.)

교사의 담화 240번~241번과 249번을 통해 “Since”와 “∴”의 용법에 맞추어 수정 되었고, 담화 242번과 246번을 통해 주어진 명제들에 근거가

되는 “given"을 작성해야 했음을 알 수 있다. 이 교실에서 문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범은 정확하고 엄밀하고 간결한 증명 쓰기 방법을 보여준다.

다. 문제해결을 위해 어떻게 전략을 세울 것인지에 대한 규범

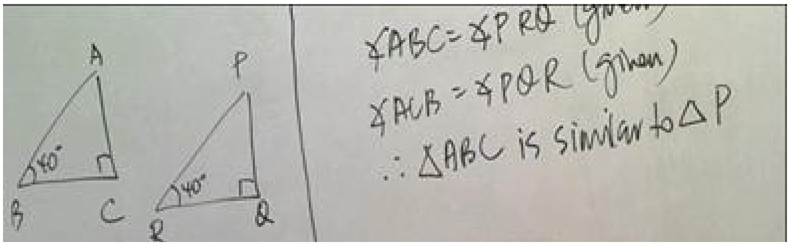
문제해결을 위해 어떻게 전략을 세울 것인지에 대한 규범은 문제해결 전략을 구상하기 위한 메타인지, 발견술, 문제해결 단계 등에 대한 논의나 설명할 때 분석되었다. 이 규범은 리드교사의 수업에 총 11번의 에피소드에서 나타났다. 이는 이 수학교실에서 발현된 사회수학적 규범의 약 40.74%에 해당하며, 리드교사의 교실에서 나타난 사회수학적 규범 중에 가장 많은 비율을 차지하는 규범이다. 아래 표는 그 에피소드가 어떻게 분포되어 있는지를 나타낸다.

<표 V-31> 리드교사 수업에서 나타난 ‘문제해결을 위해 어떻게 전략을 세울 것인지에 대한 규범’ 차시별 분포

사회수학적 규범	싱가포르 리드교사의 교실 수업						
	1	2	3	4	5	6	계
문제해결을 위해 어떻게 전략을 세울 것인지에 대한 규범	1	2※	5	3			11

(※ 표시는 본문에서 발췌한 에피소드를 나타냄)

2차시 두 번째 에피소드는 두 삼각형 △ABC와 △PRQ가 닮음임을 보이는 과제를 해결하는 과정에서 발생하였다. 2차시 수업은 닮음 조건을 이용하여 처음으로 두 삼각형이 닮음임을 보이는 수업이며, 이 두 번째 에피소드는 닮음을 수학적으로 증명하는 첫 번째 과제이다. 이때 교사의 담화는 증명을 하기 위해서 전략적으로 어떻게 사고해야 하는지를 잘 보여준다.



[그림 V-17] 삼각형의 닮음에 대한 교사의 판서

<표 V-32> 문제해결을 위해 어떻게 전략을 세울 것인지에 대한 규범: 2-E2

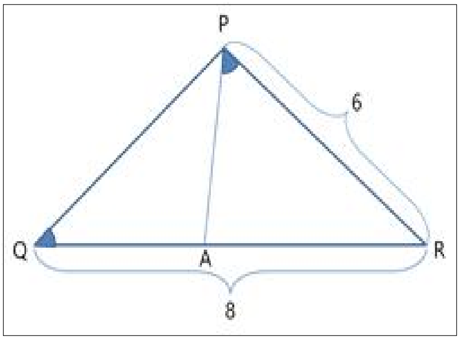
수업: 2차시 닮음인 두 삼각형을 증명하기			
에피소드 2: AA닮음 조건으로 두 삼각형이 닮음임을 증명하기			
과제: 두 삼각형 △ABC와 △PRQ가 닮음임을 증명하여라.			
	화자	담화	행동
123		Firstly, we roughly have an idea that I remembered before about testing.	
124		Rough idea, What test are you to use?	
125	TG	AA	
126	T	So, we decided,	
127		I want to use AA test.	그림 아래 AA를 쓴다.
128		So, I must to try a pair of A, angles.	
(…)			
141		So can you see this is how we identify?	
143		Many of you just say..	
144		What do I write?	
145		How would you know what you write?	
(…)			
148		Because we do all this questioning up here ourselves.	
149		We ask ourselves and answer but we did not show you how we asked ourselves.	
150		We just write the answer.	
151		Do you agree with me or not?	
152		But now, when I ask you, I am teaching you. How will you now ask yourself, when you are given a question. Okay?	
(…)			
185		Were I always right?	
186		Will you be always right? No, right.	
187		So what if you are wrong later.	
188		You start to think.	

189		Do you see? Remember I told you about problem solving.	
190		Many of you find that you cannot.	
191		Remember I told you about problem solving.	
192		Problem solving is to read the question, understand the question and what to do.	
193		Then you try our strategies.	
194		If it doesn't work, then how?	
195		Do again.	

위 증명을 위해서 적용해야 할 닮음 조건을 정하는 123번~127번의 담화는 증명을 위해 “거친 아이디어를 생성”해 보도록 한다. 그리고 148번~149번 담화와 152번 담화는 증명하는 과정에서 끊임없이 자기 자신에게 질문을 하면서 자신이 하고 있는 것이 무엇인지를 탐색해야 한다고 설명하고 있다. 또한 149번 담화는 머릿속에서 구성하는 질문과 수학적 증명을 쓰는 것에는 차이가 있음을 드러내 준다. 구체적으로 증명을 쓰는 것과 머릿속에서 하는 질문에는 거꾸로 과정으로 진행된다. 처음 교사가 던진 질문은 결론에 해당하는 AA닮음 조건을 기준으로 그것을 만족시키기 위해서 첫 번째 A, 그리고 두 번째 A를 찾아내는 질문 방향은 증명을 작성하는 것과는 반대 방향인 것이다. 마지막으로 187번~195번의 담화는 문제를 읽고 이해하고 전략을 세우고, 적용하고 반성해보는 일련의 문제해결 과정을 명시적으로 설명하고 있다.

이 에피소드에서 증명해야 할 명제는 아주 단순하고 자명해 보이는 것이다. 닮음 조건을 이용하여 증명하는 첫 번째 과제이기 때문인데, 이때 교사는 위와 같이 다양한 양상의 문제해결 전략을 구상할 수 있도록 돕는다.

특히, 아래 에피소드는 왼쪽의 도형에서 닮음인 삼각형을 찾고 증명하는 상황에서 발생한 것이다. 이 담화는 구체적으로 자신의 생각을 모니터링 하는 메타인지의 전략으로 증명의 과정에서 스스로에게 어떤 질문을 하고 있는지를 구체적으로 보여준다.



[그림 V-18] 수업 과제에 활용된 도형

첫 번째 질문은 증명하고 있는 것이 무엇인지 문제를 정확히 이해하는 것이다. 두 번째 질문은 어떤 전략을 세우는 것 또는 거친 아이디어를 만들기 위한 질문이다.

4차시 수업에서는 닮음비를 이용하여, 닮은 도형의 넓이비와 부피비를 탐구한다. 학생들은 다양한 평면도형의 닮음비와 넓이비를 조사하고, 닮음비와 넓이비의 관례를 귀납적으로 추론하는 활동을 한다. 이러한 에피소드는 2, 3, 4에서 지속된다. 이 과정에서는 자연스럽게 문제해결을 위한 귀납적 추론을 하는 방법을 학습한다.

<표 V-33> 문제해결을 위해 어떻게 전략을 세울 것인지에 대한 규범: 3-E1

수업: 3차시 도형에서 닮음 삼각형을 찾고 닮음임을 증명하기			
에피소드 1: (활동지 개별학습) 닮음인 삼각형 찾기			
과제: 도형에서 닮음인 삼각형 찾고 닮음임을 증명하기			
	화자	담화	행동
69	T	When we look at the pair of triangles, **we ask ourselves.**	
70		What are we proving?	
71		**So first thing must be asking ourselves.**	
72		**What are we proving?**	
		(…)	
83		**The first thing you ask yourself is what are you proving.**	
84		Congruent or similar?	
85		Then in fact in this case we are proving similar triangles.	
86		Then you have to ask yourself the **second question.**	
87		**What are the tests available to prove similar triangles?**	

싱가포르 리드교사의 참관하면서 진행된 인터뷰에서 교사는 수학교육의 목적을 다음과 같이 설명하였다.

리드교사: 높은 수준의 학생들에게는 좀 더 추상적인 수학을 가르쳐야 하는데,

때로는 이것이 유용하지 않다고 생각할 지도 모르지요. (…) 그러나 수학을 하지 않는다면, 과학의 문제들을 해결할 수 없고, 수학을 기초로 하는 많은 일들을 할 수 없게 됩니다. 수학의 유용성도 중요하지만, 수학은 우리가 어떻게 생각하는지에 대한 것입니다. 어떻게 문제를 보는 지에 대한 것입니다. 이것을 어떻게 적용할 것인가의 문제입니다. 이것은 단지 수학을 학습한다는 것 이상입니다.

리드교사는 수학을 통해 생각하는 방법과 알고 있는 수학적 사실을 어떻게 적용할 것인지를 학습하는 것이라고 설명하였다. 즉, 수학적 문제해결을 수학학습의 목적으로 보는 관점을 확인할 수 있다.

라. 무엇이 수학적으로 다른 아이디어로 여겨지는지에 대한 규범

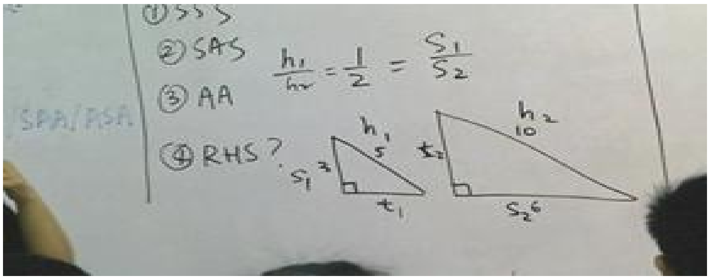
특정한 수학적 아이디어와 풀이 절차를 다른 수학적 아이디어와 비교하여 그 차이와 특징 등을 논의하거나 설명하는 과정에서 이 사회수학적 규범이 나타난다. 다음 표는 리드교사의 수업에서 이 규범이 나타난 수업을 표시한 것이다.

<표 V-34> 리드교사 수업에서 나타난 '무엇이 수학적으로 다른 아이디어로 여겨지는지에 대한 규범' 차시별 분포

사회수학적 규범	싱가포르 리드교사 교실 수업						
	1	2	3	4	5	6	계
무엇이 수학적으로 다른 아이디어로 여겨지는지에 대한 규범	1	1※					2

(※ 표시는 본문에서 발췌한 에피소드를 나타냄)

다음은 2차시 닮음조건을 처음 학습하는 수업에서 첫 번째 에피소드에서 발생한 담화이다. 교사는 삼각형의 합동조건과 삼각형의 닮음 조건을 비교해 가면서, RHS 닮음 조건이 직각삼각형의 닮음 조건으로 가능한지에 대해 물으면서 이 담화는 시작한다. 아래 그림은 담화과정에서 교사가 판서한 것이다.



[그림 V-19] RHS 닮음 조건이 없음을 설명하기 위한 교사 판서

<표 V-35> 무엇이 수학적으로 다른 아이디어로 여겨지는지에 대한 규범: 2-E1

수업: 2차시 닮음인 두 삼각형을 증명하기			
에피소드 1: 닮음 조건으로 RHS 조건이 있는지 생각해 보기			
과제: 직각삼각형에 적용할 수 있는 RHS 닮음 조건이 있을까?			
	화자	담화	행동
16		Do you have this test?	
17	Ss	No!	
18	T	How come you don't know?	
19		How is there RHS?	
20		Why not?	
21		Can we use RHS to prove the triangles are similar?	
22	S	No.	
23	T	Think about this.	
24		Why are these 4 tests to prove similar? Why no RHS test?	두 직각 삼각형을 그린다.
(…)			
54	S	Teacher~Can	
55	T	Can Who?	
56	S	RHS.	
57	T	Why you RHS~	두 삼각형의 변에 문자와 길이를 표시 한다.
58	S	There are similar.	
(…)			
63	S	If you flip it, then the corresponding ratio is the same,	
(…)			$h_1/h_2 = 1/2 = S_1/S_2$ 를 쓴다.
80		So, what does Pythagorean tell you?	
81	TG	A square plus B square is equal to C square.	
82	T	So if I try to test, these are right angle triangles.	

83		I give you these two sides.	
84		What did I give you indirect?	
85		That side too, alright? Do you agree with me?	
86		This similarity over here is this side also given to you.	
87		So even if you say that the reason is RHS test. Why isn't there so far RHS test?	
88		What do you think?	
89		Because before man use RHS test, use what?	
90		The Pythagorean theorem, and then they can get that side.	
91		And then after that we can have all three sides already to use what?	
92		Use SSS, and use SAS.	
93		Do you agree with me? Can you see? OK?	
94		That's why the reason this test we don't adopt RHS.	
95		But when right angle triangles are given to you, a lot of information is already given to you.	
96		Easy or not? Because Pythagorean theorem.	

이 규범은 수업 중 한 학생이 RHS 닮음 조건이 가능하다는 주장을 하게 되면서 나타난다. 위 담화는 삼각형의 세 가지 닮음조건과 직각삼각형의 닮음 조건 RHS 사이의 수학적 아이디어의 차이를 설명한다.

교사의 판서는 학생이 RHS 닮음 조건에 대한 설명하는데 도움을 준다. 즉, 학생은 교사의 판서를 기반으로 자신의 근거를 설명을 하면서 참여하게 된다. 63번에서부터 연결되는 담화를 통해 학생은 직각삼각형이며, 대응하는 변의 비가 같음을 근거로 RHS 닮음 조건이 가능함을 설명하기 위해 교사는 학생의 설명을 위의 그림과 같이 "$h_1/h_2=1/2=S_1/S_2$"를 같이 작성하면서 학생의 설명을 객체화 시켜 준다. 이어지는 담화 80번~89번의 담화는 RHS 닮음 조건으로 하기에 다른 삼각형의 닮음조건과 어떤 점에서 수학적으로 다른지에 대한 설명을 위한 단계적 질문이라 할 수 있다.

교사는 피타고라스 정리를 활용하여, RHS 닮음 조건이 없음을 설명한다. 이러한 설명은 싱가포르의 교육과정에 기반하기 때문에 가능하다. 싱가포르는 중등학교 2학년에서 피타고라스 정리를 학습하고, 중등학교 3학년에 삼각형의 닮음조건을 학습한다. 따라서 중등학교 3학년 수업인

이 수업에서 RHS 닮음 조건의 여부를 설명하는데 피타고라스 정리를 활용할 수 있었던 것이다. 한국에서는 닮음의 의미와 닮음 조건을 중학교 2학년 과정에서 학습하는데, 2009개정 교육과정에서는 피타고라스 정리가 중학교 3학년 과정에 배치되어 있고, 2015 개정 수학과 교육과정에서는 닮음과 닮음의 조건을 학습한 후에 피타고라스 정리를 학습하기 때문에, 이러한 설명은 불가능하다.

마. 무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대한 규범

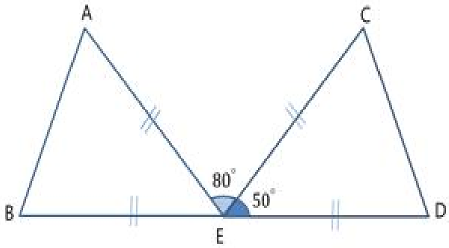
수학적으로 효율적인 풀이와 그렇지 않은 풀이를 구분하고 그것에 대한 규범을 형성하기 위해서는 교실 안에서 효율적인 것을 판단하는 기준을 무엇에 두는지에 대한 합의가 이루어 져야 한다. 싱가포르의 리드교사의 수업 1차시에 한 번의 에피소드 안에서 무엇이 수학적으로 효율적인지에 대한 논의가 이루어 졌다.

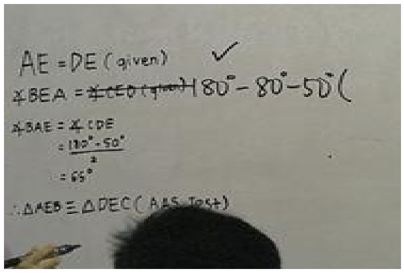
<표 V-36> 리드교사 수업에서 나타난 '무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대한 규범' 차시별 분포

사회수학적 규범	싱가포르 리드교사 교실 수업						
	1	2	3	4	5	6	계
무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대한 규범	1※						1

(※ 표시는 본문에서 발췌한 에피소드를 나타냄)

1차시 수업에서 다음 그림에서 합동인 삼각형을 찾고 증명하는 과제를 해결하고 있다. 두 학생은 서로 다른 방법으로 칠판에 나와 증명을 작성하였고,





[그림 V-20] 수업 과제 및 풀이

<표 V-37> 무엇이 수학적으로 다른 아이디어로 여겨지는지에 대한 규범: 1-E4

수업: 1차시 합동인 두 삼각형을 판별하기			
에피소드 4: 학생이 자신의 풀이를 설명하기			
과제: 두 삼각형 △AEB와 △DEC가 합동임을 증명하여라.			
	화자	담화	행동
$\boxed{307}$	T	You told yourself you did a lot of calculation right?	
308		So in other word, you don't say given.	
309		You did calculation on yourself.	
(⋯)			
314		This thing is equal to what?	각 BEA가리킨다.
315		180 degrees minus 80 degrees minus 50 degrees, is it angles sum of triangles?	각 CED에 가운데 줄을 긋고 판서한다.
(⋯)			
350		Can she do that?	
351		Yes or no?	
352	S	Yeah	
353	T	Yes.	
354		She can work.	
(⋯)			
$\boxed{359}$	T	But just that she has too a lot of calculation rather based on given information.	
$\boxed{360}$		In fact, this question tells that I think you consider over given. A lot of calculus.	

한 학생은 SAS 합동조건을 이용하여 증명하였고, 위 학생은 ASA 합동조건을 이용하여 증명하였다. 주어진 조건을 충분히 활용하는 것보다 이등변 삼각형의 각의 성질을 이용하여, 각 BAE 계산해 내어 합동임을 보였다. 교사는 담화 307번, 359번~360번에서 학생이 주어진 정보만으로

해결할 수 있는 상황을 더 많은 계산을 통해 해결한 것으로 간주한다. 따라서 이 담화는 무엇이 효율적인 해결방법인지에 대한 규범을 형성하는 과정에서 교사의 설명이 의미협상 과정에서 중요하게 역할을 수해함을 확인할 수 있다.

바. 수학적 표현을 어떻게 쓰는 것이 좋은지에 대한 규범

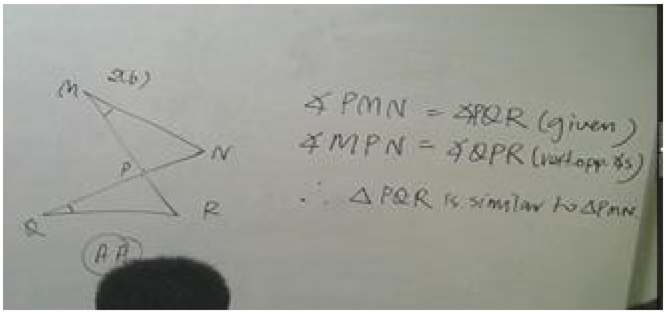
수학적 표현의 논리적 적합성이 아니라 의사소통의 효율성을 높일 수 있는 표현 방법이나 수학적으로 더 통용되는 표현해 대해 논의하거나 설명하는 경우 “수학적 표현을 어떻게 쓰는 것이 좋은지에 대한 규범”으로 분석되었다. 싱가포르의 리드교사의 수업 1차시에 한 번의 에피소드 안에서 이 규범이 나타났다.

<표 V-38> 리드교사 수업에서 나타난 ‘수학적 표현을 어떻게 쓰는 것이 좋은지에 대한 규범’ 차시별 분포

사회수학적 규범	싱가포르 리드교사 교실 수업						
	1	2	3	4	5	6	계
수학적 표현을 어떻게 쓰는 것이 좋은지에 대한 규범		1※					1

(※ 표시는 본문에서 발췌한 에피소드를 나타냄)

아래 그림은 2차시 수업에서 학생들과 함께 닮음을 증명을 해 가는 상황에서 발생한 담화이며, 아래 그림은 교사의 판서를 보여준다. 교사는 학생들에게 질문하고 얻은 답으로부터 위와 같이 판서를 하였다.



[그림 V-21] 수업 과제 및 교사의 판서

<표 V-39> 수학적 표현을 어떻게 쓰는 것이 좋은지에 대한 규범: 2-E9

수업: 2차시 닮음인 두 삼각형을 증명하기			
에피소드 9 Z모양의 도형에서 닮음인 삼각형을 찾기			
과제: 두 삼각형 △PQR와 △PME이 닮음임을 증명하기			
	화자	담화	행동
351	T	Triangle PQR is similar to …	
352	S	PMN. (T: PMN)	
353	T	Looking at this statement.	풀이 마지막 줄
354		Do you have any comment?	
355		All of you look at this, and comments.	
356		Is it wrong? No.	
357		Similar is not wrong. But this statement.	
358	S	Never follow this format.	
359	T	What do you mean never follow this format?	
360		If they say, If you write proof, all of rest of you are.	
361		When you write a proof, you're talking about this triangle PMN.	
362		You can refer the left hand side this one.	
363		So your readers were reading looking reading and looking reading over here.	그림과 증명을 번갈아 집는다.
364		And then reading PQR they are look ah hut?	
365		So, you'll try to the keep the same by what format is structured.	
366		So alright, PQR, you will say what?	
367	S	PMN.	
368	T	PMN and what.	
369	S	PQR.	

356번~359번의 담화에서 보여주듯 위 증명은 닮음을 보이는 것에는 오류가 없다. 그러나 증명의 형식을 따르지 않은 것으로 논의되고 있다. 그렇다면, 이 상황에서 논의되고 있는 증명의 형식은 무엇이었을까? 361번~365번의 교사의 담화는 그것을 잘 설명한다. 증명의 읽는 독자의 시선에 따라 독자가 이해하기 쉽게 증명을 써야 한다는 것이다. 이것은 논리적인 결함의 문제가 아니라 의사소통의 효율성에 대하 문제로 '수학적 표현을 어떻게 쓰는 것이 좋은지에 대한 규범'으로 분석되었다.

구체적으로 증명에서 서술하고 있는 삼각형이 위에서 아래로 진행되기 때문에, 최종적으로 결과를 진술 할 때에도 그 순서를 따라야 한다는 것이다.

3. 한국 수석교사의 수학수업과 싱가포르 리드교사의 수학수업 사례에서 나타난 사회수학적 규범 비교

수업 안에서 발현되는 사회수학적 규범은 교사와 학생들이 구성원들의 행위에 부여하는 의미와 그것의 창출 과정에 관심을 둔다. 이 개념으로부터 수학교실의 교실문화는 해석적 관점에서 이해된다. 해석적 관점은 개인의 사회적 행위가 일정한 법칙에 따라 일관성 있게 이루어지는 법칙적 현상이 아니라, 자신과 타인의 행위에 부여한 의미를 해석하면서 이루어지는 현상을 파악한 것이다. 즉, 수학적 의미는 그것을 사용하고 있는 그 교실에서 어떻게 학생들에게 해석되고 있는지에 따라 서로 다를 수 있음을 의미한다. 앞 두 절에서는 한국의 수석교사와 싱가포르의 리드교사의 수업에서 나타난 사회수학적 규범을 해석적 관점에서 교사와 학생들의 담화와 행동 그리고 그것의 의미에 초점을 맞추어 분석하였다.

그러나 교실의 현상을 해석적 관점이나 미시적 관점으로만 보는 것은 교사와 학생이라는 행위자의 중요성을 지나치게 강조하여, 사회구조의 영향력을 경시할 수도 있다. 교사와 학생의 행동 및 상호작용이 일어나

는 사회적 역사적 맥락과 교육에 제약을 주는 정치, 경제 등 외부적 요인을 경시할 수도 있다는 것이다. 학생과 교사의 행위와 그 것의 의미를 부여하는 일은 외부와 단절된 교실 속에서 이루어지는 것은 아니다. 좁게는 학교라는 체제 안에서 학교의 구조와 문화의 영향을 받으며, 넓게는 학교가 속한 지역사회와 국가의 사회, 경제, 문화적 특성의 영향을 받는다. 교육현상을 정확히 이해하고 설명하기 위해서는 교육 관련 행위의 본질에 대한 통찰을 가능하게 하는 미시적 관점과 개인의 행위를 규제하는 사회 구조적 특성에 주목하는 거시적 관점을 결합하여 조망하려는 접근이 필요하다(김신일, 2010; Giddens, 2006). 교사의 역할은 학교라는 제도 속에서 국가에서 기대하는 교육과정을 구현하고, 개발된 교과서나 학습도구들을 바탕으로 계획을 수립하며, 각 수준에서 기대되는 학생의 행동을 평가한다. 학생도 마찬가지이다. 학교라는 제도 속에서 주어진 사회적 지위를 따르는 규정된 기대를 수행하는 것이 역할인 것이다(Young, 1970; 이정선, 2002).

특히 이 절에서는 각 사례에서 나타난 사회수학적 규범의 공통적인 특징과 차이를 비교하며, 그것을 각 사례가 놓여있는 교실과 교실 밖의 좀 더 거시적인 관점에서 해석해보고자 한다. 특히, 여기서는 실제 분석 자료로서 수집 가능한 각 나라의 문화서화 된 교육과정, 검인정 교과서, 평가체계 및 평가 문화의 특성 등과 관련하여 각 교실에서 나타난 미시적인 교실 문화인 사회수학적 규범과의 관련성을 찾고자 한다.

한국과 싱가포르의 수학수업 사례에서 나타나는 사회수학적 규범은 총 8가지 범주로 확인할 수 있었다. 한국과 싱가포르의 수학수업 사례에서 나타난 사회수학적 규범 중 무엇이 수학적 설명으로 받아들여질 만한지, 무엇이 수학적으로 다른 해결방법인지, 무엇이 쉽고 어려운지, 무엇이 효율적인지는 이미 선행연구를 통해 밝혀진 바가 있는 것들이다(Cobb & Yackel, 1996; Browers, Cobb, & McClain, 1999; McClain & Cobb, 2001; 방정숙, 2006; Levenson, Tirosh, & Tsamir, 2009를 보라). 그러나 수학적 문제해결을 위해서 어떤 전략을 사용할 것인지, 수학교실에서 받아들여질 만 한 개념은 무엇인지, 수학적 표현은 어떻게 쓰는 것이 좋은

지에 대한 사회수학적 규범은 이 연구를 통해서 새롭게 밝혀진 사회수학적 규범이다.

그동안 사회수학적 규범에 대한 탐구는 학생 중심의 수업으로 교수 실험 과정에서 발현되는 새로운 교실 안의 상호작용 양상을 탐색하는 것에 초점을 맞추어 분석이 되었다. 그리하여 교실 내 상호작용을 학생 중심으로 전환 시킬 수 있는 방법적인 면에 초점을 두었다. 따라서 그 양상이 발현되는 학교 밖 상황과의 연관한 설명은 부족하였다. 즉, 교실에서 나타나는 현상을 해석적인 관점에서만 분석한 것이라 할 수 있다.

그러나 앞서 해석적인 관점과 거시적인 관점을 상호 보완적인 관계에 있음을 설명하였다. 즉, 수학교실에서 발현되는 사회수학적 규범은 교사와 학생의 행동 및 상호작용에 영향을 주는 학교 밖의 거시적인 맥락과 통합된 해석이 요구된다. 특히, 이 연구에서 밝혀진 각 나라의 수업 사례에서 나타난 사회수학적 규범과 그 나라가 터한 학교 밖 상황과의 연관성을 통해 각 나라의 수학 교실 문화의 고유한 특성을 해석 할 가능성을 준다. 한국의 수석교사의 수학수업과 싱가포르의 리드교사의 수학수업에서 나타난 사회수학적 규범을 수업 차시별로 나타내면 <표 V-40>과 같다.

사회수학적 규범의 빈도는 연구방법에서 설명한 바와 같이 각 수업 차시의 에피소드 안에서 그 사회수학적 규범이 해석되는 상황이 포착되는 경우 그 에피소드를 분석의 단위로 하여 그 빈도를 확인하였다. 위 표의 수는 같은 에피소드 안에서 서로 다른 사회수학적 규범이 발현될 수도 있기 때문에, 에피소드를 세는데 중복을 허락한 빈도라 할 수 있다.

<표 V-40> 두 수업 사례의 사회수학적 규범의 빈도와 비율

사회수학적 규범	한국										싱가포르						
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	빈도수 합 (비율)	1	2	3	4	5	6	빈도수 합 (비율)
수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범	1	2	2	3	3	1	1			13 (35.13%)	4	2				1	7 (25.93%)
문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범			1	1				2	1	5 (13.51%)	2	2			1		5 (18.52%)
수학적 표현을 어떻게 쓰는 것이 좋은지에 대한 규범			1		1					2 (5.40%)		1					1 (3.70%)
수학적으로 다른 아이디어에 대한 규범			1	1			2			4 (10.81%)	1	1					2 (7.41%)
무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대한 규범			3	1		1	2		1	8 (21.62%)	1						1 (3.70%)
문제해결을 위해 어떻게 전략을 세울 것인지에 대한 규범											1	2	5	3			11 (40.74%)
무엇이 수학교실에서 받아들여질 만한 내용인지에 대한 규범			1	1						2 (5.40%)							
어떤 문제가 더 좋은 문제인지에 대한 규범	1			1	1					3 (8.10%)							
계	2	2	9	8	5	2	5	2	2	37 (100.00%)	9	8	5	3	1	1	27 (100.00%)
전체 에피소드	7	10	9	11	19	12	14	10	10	102	5	12	6	8	5	7	43

에피소드를 분석의 단위를 하기 때문에, 수업의 활동이 더 많은 수석 교사의 수업에서 더 많은 사회수학적 규범이 나타나기 쉽다. 두 교실의 수업 사례의 데이터의 양에서 비롯된 사회수학적 규범의 빈도를 두 사례를 비교하는데 사용하지 않는다. 그러나 각 교실의 수업 내에서 사회수학적 규범의 분포를 이해하는 것으로 빈도를 분석을 활용 할 수 있다.

먼저 각 사례에서 공통적으로 나타난 사회수학적 규범은 다섯 가지 이

다. 같은 사회수학적 규범으로 코딩되었지만, 그것이 드러나는 양상은 상이함을 보였다. 또한 한국의 수석교사 수학교실에서만 나타나는 사회수학적 규범으로는 두 가지가 나타났고, 싱가포르 리드교사 수학교실에서만 나타난 사회수학적 규범은 한 가지로 나타났다. 특히, 리드교사의 수업에서만 나타난 문제해결을 위한 전략과 관련된 규범은 리드교사의 수학수업에서 가장 많은 비율로 나타난 사회수학적 규범이었다.

앞으로 이 장은 두 수학교실에서 공통으로 나타난 사회수학적 규범 다섯 가지와 각 수업에서만 나타난 규범들을 구분하여 서술한다. 그리고 나타난 사회수학적 규범을 두 나라의 교육과정, 교과서, 평가와 관련 선행연구를 통해 해석을 시도한다. 또한 연구자가 해석한 각 수업의 특성에 대하여 연구참여자의 검증을 받기위해 진행된 인터뷰(또는 서면 인터뷰)는 두 사례의 공통점과 차이점을 밝히는 자료로도 활용되었다. 또한 연구 참여자 스스로 자신의 수학교실에서 발현된 사회수학적 규범이 가지고 있는 특성이 교실 밖에서 일어나는 제도적인 차원에서 현상과의 관련성을 가지고 있는지에 대하여 자신의 관점을 피력하였고, 이 또한 분석의 대상이 되었다.

가. 한국 수석교사의 수학교실과 싱가포르 리드교사의 수학교실에서 공통적으로 나타난 사회수학적 규범

공통적으로 나타난 사회수학적 규범은 다섯 가지로 수학적으로 수용 가능한 설명과 방법에 대한 규범, 문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범, 수학적 표현을 어떻게 쓰는 것이 더 좋은지에 대한 규범, 무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대한 규범, 그리고 무엇이 수학적으로 다른 아이디어로 여겨지는지에 대한 규범 이다.

수학적으로 수용 가능한 설명과 방법에 대한 규범은 한국의 수석교사의 수업에서 나타난 사회수학적 규범의 약 35.13%에 해당하며, 수석교사의 수업에서 가장 높은 비율로 나타났다. 반면, 싱가포르 리드교사의

수업에서는 약 25.93%의 비율로 두 번째로 높은 비율을 차지하는 것으로 나타났다.

수학적으로 수용가능 한 설명과 방법에 대한 규범은 수학적 해법을 설명하거나 발표할 때, 청자가 이를 이용하기 위해 설명이 갖추어야할 요건이나 특징에 대해 언급하거나, 교실에서 기대되는 수학적 의사소통 방법에 대해 논의하는 경우 발생한다. 수석교사의 수업과 리드교사의 수업에서 이 규범을 보여주는 양상들이 다양하였으며, 다음 표는 각 수업 사례에서 이 규범과 관련하여 나타난 양상들을 보여준다. 나타난 양상과 그 양상이 나타난 교실의 에피소드를 표시하였다. n-Em은 n차시 수업의 m번째 에피소드를 의미한다.

<표 V-41> 수학적으로 수용 가능한 설명과 방법에 대한 규범의 양상

수학적으로 수용 가능한 설명과 방법에 대한 규범		
	한국의 수석교사 수학수업	싱가포르 리드교사 수학수업
공통점	• 수학적 설명은 근거가 있어야 하고 타당해야 함(5-E16) • 수학적으로 정확한 용어로 설명하는 것이 좋음(1-E4)	• 수학적 설명은 근거가 있어야 하고 타당해야 함(6-E7) • 정확한 수학적 용어로 말하기 (1-E4)
차이점	• 수학적 용어를 설명할 때에는 애매한 표현으로 설명하지 않음 (1-E4) • 설명할 때 교과서 또는 활동지에 써 있는 것을 그대로 말하지 않음(1-E4) • 순환논리로 설명하지 않음(2-E2) • 설명은 답을 확인하는 것이 아니라 답을 구하는 과정이어야 함(5-E16) • 반례는 문제의 조건을 고려하여 찾아야 함(6-E4) • 동료들의 풀이를 기반으로 그것의 오류를 보완하며 설명함(3-E4) • 전체 학생들 앞에서 발표할 때에는 질문형식으로 발표함(4-E4)	

수학적으로 수용가능 한 설명과 방법에 대한 규범이 수석교사의 수업에서 많은 부분을 차지하는 만큼, 수석교사의 교실에서는 이 규범과 관련하여 교실에서 만들어가는 의미가 위와 같이 다양하게 분석되었다. 반면, 싱가포르의 리드교사의 수업에서 수용가능 한 설명과 방법에 대한 규범을 보여주는 일곱 번의 에피소드에서는 두 가지 양상이 지속적으로 강조되는 것으로 확인되었다.

특히, 수학적 용어의 사용에 대하여 한국의 수석교사는 “수학적으로 정확한 용어를 쓰는 것이 좋음(에피소드 1-E4)”이라는 양상이 나타나는 것으로 보였고, 싱가포르의 리드교사의 수업에서는 “정확한 수학적 용어로 말하기(1-E4)”라는 양상으로 분석되었다. 리드교사의 교실에서는 학생들이 수학적 성질 자체를 이해하는 것 뿐 아니라 그 성질을 지칭하는 용어를 정확하게 말하는 것이 일관되게 강조되었다. 두 사례 모두에서 수학적 용어를 정확하게 사용하는 것을 강조하는 것으로 드러났다.

수학적 용어와 관련하여 수석교사의 수학수업이 따르고 있는 한국의 2009개정 수학과 교육과정을 살펴보면, 이 교육과정에서는 2007년부터 신설된 수학적 과정의 한 축으로 수학적 의사소통을 지속적으로 강조하면서도, 학습량 경감을 위해 일상적인 표현으로 대체할 수 있는 용어와 기호들을 교육과정에서 삭제 하였다. 2009개정 수학과 교육과정에서 “수학적 의사소통은 수학의 아이디어나 생각 등을 수학적 표현수단을 통하여 서로 공유하고 학습하게 되는 과정을 수행하는 것을 의미(한국과학창의재단, 2011, p,11)”하는데, 이때 수학적 표현 수단으로서 “수학 용어, 기호, 표, 그래프 등의 수학적 표현을 이해하고 정확히 사용(교육부, 2015, p. 39)”하는 것을 교수 학습상의 유의사항으로 두고 있다.

수학적 용어의 정확한 사용을 강조하는 수업으로 해석한 연구자의 분석에 대하여 연구대상자 검증 과정에서 진행된 인터뷰에서 다음과 같이 설명하였다. 아래는 수석교사에게 수학적 의사소통에 대한 의미를 무엇으로 생각하는지에 대한 대답이다.

수석교사: 의사소통은 쌍 방향이어야 해요. 문제해결 과정을 진술하는 것을 보겠다는 것과는 (달라요) 지금 이곳에서 쌍방으로 왔다 갔다 하는 것

을 의사소통 이라고

위의 설명으로 부터 수석교사는 상호작용이 즉각적이고, 쌍 방향으로 일어나는 것을 강조함을 알 수 있다. 특히 수학적 의사소통은 이러한 특징을 가지고 있는 것으로 설명하였다. 따라서 수석교사의 수업에서는 학생들이 수학적으로 말 할 수 있는 기회를 주는 수업이 계획되고 그러한 활동을 하는 에피소드가 많이 분석된 것이다. 위와 같이 수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범에 다양한 양상은 이러한 교사의 의도를 바탕으로 구성된 활동에서 발현되는 것이라 할 수 있다.

최근 수석교사는 수학적 의사소통을 수행평가와 연계시키려는 시도를 하고 있다. 특히, 이 수석교사는 “수학적으로 말하기”라는 수행평가를 올해(2017년)부터 진행하고 있다고 하였다. 학생들에게 ‘정확한 수학적 용어를 사용’하여 문제해결 과정을 ‘질문으로 설명하는 것’을 평가한다고 하였다. 즉, 이 교사의 수업 안에서 지속적으로 보여주고 있는 규범의 양상인 수학 용어의 정확한 사용과 의소소통 하는 방법을 평가로 구현 한 것이다.

2009 개정 수학과 교육과정에서는 ″수학적 사고과정과 결과를 합리적으로 의사소통하는 능력(교육과학기술부, 2011, p. 27)″을 평가하도록 되어 있으며, 수행평가와 관련하여 서울시 교육청은 학업성적 관리지침에서 “교과협의회 및 학업성적관리위원회를 통해 각 교과별로 부여하는 과제 분량의 적정화 및 실시 시기의 적절한 안배로 학생의 부담 경감(서울특별시 교육청, 2016, p.27)”이라는 지침을 제시한다. 수석교사의 학교에서는 학업성적 관리의 60%의 비율로 수행평가를 반영하도록 하고 있으며, 그 안에서 수학적 말하기는 수행평가의 80%를 차지한다고 하였다. 수행평가에서 이러한 수학적 말하기를 도입하는 것은 수석교사의 실천적 연구를 통해 구현된 것이라 분석된다.

수석교사: 평가가 해마다 새로운 것을 시도해 왔죠. <u>작년엔 말하기 수학이라고 해서 학습지로 몇 번 시도했어요. 1~2년 시도하다 보면 그다음에 그것을 평가로 집어 넣어서</u> (평가에 적용합니다.) 애들이 꾸준히 그 토

양 속에서 연습이 되어야 그 다음에 평가 시스템을 받아들이고 할 수 있지 아무것도 수업을 바꾸지 않고, 갑자기 아무것도 바꾸지 않고 새로운 평가방식을 바꾸면 적응할 수 없잖아요. 그래서 평가를 바꾸기 2-3년 전에 (수업 활동을)계속 시도해, 하다가 바꾼다구요. 그러면 훨씬 정교하고 세련되게 아이들이 평가방식에 적응하게 만드는 거죠. (…) 수업이 바뀐 시스템 안에서 아이들이 평가가 유리하게 만들어 놔야 해요. 수업은 바꿔 놓고 평가를 옛날에 객관식 지필평가로 해버리면, 애들이 저항해. 수업과 평가와 교육과정이 일치해야 하는데, 이것이 따로 논다 말이죠. 수능이 안 바뀌고 있는 것처럼 학습자 중심으로 하라고 하면서, 지금 수능시험이 그런 아이들이 시험을 잘 볼 수 있는 평가가 아니예요. 논술형도 아니고. (…)

수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범과 관련하여 한국의 수석교사의 수업에서 다양하게 나타나게 된 것은 한국의 수학과 교육과정에서 지향하는 방향과 그것을 구현하기 위한 실천적 노력의 산물이라 할 수 있다. 따라서 한국 수석교사의 수업에서 발현된 사회수학적 규범은 사례로서 의미를 가진다. 그러나 수석교사의 인터뷰는 한국 수학교사가 처해있는 문제와 그것을 극복하려고 노력하는 일선의 수학 교사의 고뇌를 이해하는데 도움을 준다.

수석교사: 교육부에서 말로 바꿔라 주창하고 있는데, 그 방법을 가르쳐 주지 않고, 선생님들도 해 온 것을 바꾸지 못해 모르기도 하지만, 그렇다고 열심히 연구하려는 생각도 별로 없고. 과정중심 평가, 학습자 중심 수업을 하라고 하는데 교육부에서는 그 방법을 선생님들도 알고 있지 않아요. 교육부나 교육청도 뭘 적극적으로 (수업 개선 방안을) 주지 못하고, 미래 핵심역량 수업을 해라. 학습자 중심 수업을 해라 강조 요구만 하고, 그러나 실제적인 모습이 안 바뀌죠. 왜냐하면, 어떠한 연구나 연수가 이루어 지지 않기 때문이죠. 교육과정이 교육부에서는 학습자 중심 수업이나 강조하는데, 그런데 그것을 실제 어떻게 구현할 것인지에 대한 아이디어도 없고, 교사 재교육도 시키지 않고. 선생님들도 스스로 해야 한다는데 어떻게 해야 해 하면서, 전통적인 수업방식을 고수하는 거야. 제 개인적인 신념에 의한 변화가 크다. 그러나 실제로 이 가치는 (한국의) 교육과정에서 강조하고 있는 것이다. 그러

나 실제적으로 가르쳐지지 않는 것이다. 한국은 강조하고 있으면서, 그렇게 하고 있지 않는다. 교육부나 교육과정에서 말하는 가치에 동의한다. 근데 (교육부나)외국에서 가지고 와가지고 이렇게 하는 것이 바람직 하지 않냐라고 말만 할뿐 실제로 아무것도 바뀌어있지 않고 방법도 모른다. 이렇게 해야 한다는 것은 알고 있는거야. 나는 그게 맞아 바람직해 그것을 어떻게 해야 할지 할 부분은 개인적인 부분이라는 거죠. 그것을 확산시키기 위해서 교사 연구회도 만들고 워크샵도 하고 교사 운동을 하고 있는 거예요.

한국의 수석교사의 수업과 싱가포르의 리드교사의 수업에서 “수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범”에서 공통적으로 나타난 수학 용어의 정확한 사용에 대하여 수석 교사는 궁극적으로 학습해야 하는 용어를 정확하게 사용하는 것을 수학 학습에서 중요한 부분으로 인식하고 있었다. 수학 용어의 정확한 사용에 대한 연구자의 질문에 대해 수석교사의 다음과 같이 설명하였다.

수석교사: 학생들이 얼마큼 이해하고 싶은지 보고 싶으면, (학생이)자기 식의 언어로 고쳐서 이해하는 것이 좋은데, 그러나 그것이 고착되게 해서는 안 돼죠. (…) 배움의 초기 단계 (엄밀하게 용어를 사용하는 것을) 강조해 버리면, 애들이 이해가 되지 않은 상태에서 수학용어가 내 것이 되지 않은 상태에서 암기하듯이 쓰이기 때문에, (…) 처음 초기 단계에서는 이해위주로 가고, 그것을 새롭게 배우는 수학용어에서는 점진적으로 쓰는 것을 권장을 하죠. 처음부터 엄밀성만 중요하게 생각하면 애들이 이해하지 못한테 용어만 외우게 되기 때문에,

교사는 점진적으로 정확한 수학용어를 사용하는 것을 강조해 간다고 설명하였다. 이 교사의 인터뷰에서 “자기 식의 언어”라는 표현으로 그 교실에서 “설명할 때 교과서 또는 활동지에 써 있는 것을 그대로 말하지 않음”과 같은 양상이 나타나게 되는 교사의 생각도 확인해 볼 수 있다. 자신의 말로 설명하는 것, 즉 이해를 바탕으로 의사소통하는 것을 기본적으로 전제로 하면서 점진적으로 복잡한 설명을 간결하게 해 줄 수 있는 수학적 용어의 사용을 강조하는 것이다. 특히 수학 용어와 기호의 정

확한 사용을 강조하는데 그것의 경제적인 효율성을 느낄 수 있게 하기 위함임을 확인할 수 있다.

> 수석교사: 길고 복잡한 한 상황을 이런 기호와 정의를 약속하고 이렇게 표현하는 것. 그것이 수학이 복잡한 상황을 아주 단순화 하여 표현할 수 있기 때문에 이런 생명력을 가지고 있고. 수학의 경제성 기호의 경제적인 것 이것도 느끼게 해야 하죠. 그렇게 하라고 권장을 해야 하죠.

수석교사의 수업에서 수학적으로 수용 가능한 설명과 방법에 대한 규범이 나타나는 에피소드는 학생들이 자신의 풀이를 설명하거나 교사가 학생들의 풀이를 바탕으로 설명하는 하는 경우에서 자주 발생하였다. 싱가포르의 리드교사의 수업에서 이 규범이 발현하는 에피소드는 학생의 풀이를 설명하거나 교사의 질문에 대해 학생들이 답하는 과정에서 주로 발생하였다.

싱가포르 교육과정에서는 의사소통을 정확하고 간결하며 논리적으로 수학적 아이디어와 논증을 표현 할 수 있는 수학적 언어의 사용 능력으로 본다.

> communication refers to the ability to use mathematical language to express mathematical ideas and arguments precisely, **concisely** and logically. It helps students develop their understanding of mathematics and sharpen their mathematical thinking (MOE, 2013, p15). (진하게 표시는 강조하기 위해 저자가 표시한 것임)

싱가포르의 수학과 교육과정은 2001년, 2007년 그리고 2013년에 걸쳐 총 3번 개정되었는데, 위의 의사소통과 관련한 내용은 2007년 처음 기술되었고, 그 이후로 의소사통에 관한 같은 기조를 이어가고 있다. 특히 싱가포르의 교육과정에서 서술하고 있는 의사소통은 수학적 언어로 concisely(간결하게) 표현하는 것 역시 의사소통의 중요한 특징으로 보았다는 점이다.

한국의 교육과정은 7차례의 전면 개정한 이후로 2007년부터 수시 개정

하고 있다. 수석교사의 수업이 참여관찰 된 2016년 그 교실에서는 2009 개정 수학과 교육과정에서는 싱가포르의 교육과정에서 언급된 ‘간결성’을 수학적 의사소통과 관련하여 서술하고 있지 않으며, 2018년부터 적용될 2015개정 수학과 교육과정에서도 의사소통에서의 ‘간결성’에 관한 서술은 포함되어 있지 않는다.

싱가포르의 리드교사의 수업에서는 정확하고 엄밀한 수학적 용어를 표현하는 것이 매우 강조되는 것으로 나타났다. “수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범”과 “문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범” 동시에 정확한 수학 용어의 사용이 강조한다. 연구대상자 검증 과정에서 진행된 리드교사의 서면 인터뷰를 통해 이러한 리드교사의 교실에서 나타난 사회수학적 규범적 양상이 싱가포르의 교육과정에서 말하고 있는 정확하고, 간결하고, 논리적이어야 한다는 수학적 언어의 의미를 일관되게 사용하고 있음을 확인할 수 있었다. 연구자는 “엄밀한 수학 용어의 말하기와 쓰기를 수업에서 강조하는 것이 교실 문화의 특징으로 분석되었는데, 그것에 대하여 동의 하시는가? 라는 질문에 리드교사는 다음과 같이 대답하였다.

리드교사: In the Processes component of the Mathematics Framework, the mathematical processes involved in the acquiring and applying mathematical knowledge require students to reason and communicate. In order to analyse mathematical situations and construct logical arguments, students definitely require the ability to use mathematical language to express mathematical ideas and arguments precisely, concisely and logically. Thus, developing students’ mathematics vocabulary, including terminologies, expands their abstract reasoning ability and moves their learning of mathematics beyond operations to problem solving.

리드교사의 설명은 싱가포르의 교육과정에서 말하고 있는 의사소통의 의미에 따름을 알 수 있었다. 싱가포르 수학과 교육과정에서 의사소통이 학생들의 수학적 사고를 더 정교화 할 수 있다는 관점에서 더하여 리드

교사는 학생들의 수학적 어휘를 발달이 학생들이 추상적인 추론능력과 문제해결 능력으로 연결 될 가능성이 있다고 보았다.

수학적 용어를 정확하고 엄밀하게 사용하고 말하는 것이 강조되는 교실 문화가 싱가포르의 수학교실에서 일반적으로 강조되는 특징인지에 대한 연구자의 질문에 리드교사는 다음과 같이 응답하였다.

> 리드교사: I emphasize a lot on the importance of the use of mathematical language, including to speak and write rigorous terminology in my lessons. (⋯) I believe the emphasis on the use of mathematical language is not just an unqiue feature in my classroom, but it is a characteristic shared among mathematics teachers in Singapore. The difference is probably the degree of emphasis.

싱가포르의 리드교사는 자신의 수업에서 강조되었던 엄밀한 용어의 사용이 정도의 차이는 있을 수 있지만, 싱가포르 선생님들이 동시에 강조하는 특징일 것이라고 보았다.

수업 사례에서 수학적으로 수용 가능한 설명과 방법에 대한 규범이 나타나는 에피소드는 학생들이 자신의 풀이를 설명하거나 교사가 학생들의 풀이를 바탕으로 설명하는 하는 경우가 많았다. 이때, 한국의 수석교사의 수학교실에서는 “수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범”을 나타내는 경우가 많았던 반면, 싱가포르의 리드교사의 수업에서는 “문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범”을 나타내는 경우가 더 많았다. 학생들이 자신의 문제해결 방법을 직접 설명하거나 교사가 설명하는 수업활동에서 한국의 수석교사와 같이 수용 가능한 설명인지 적합한 의사소통 방법인지 대한 논의보다 학생이 기록한 풀이와 증명이 이 교실에서 기대되는 규범을 따랐는지, 그것을 어떻게 수정하여 쓸 것인지에 대해 초점이 맞추어져 있었다.

문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범은 한국의 수석교사 수학교실에서 약 13.51%, 싱가포르 리드교사의 수학교실

에서 18.52%를 차지하는 것으로 나타났다. 이 규범은 문제해결이나 증명을 쓰는 과정에서 수학적 아이디어를 어떻게 표현해야 할 것인지에 대한 논의나 설명이 있는 경우를 중심으로 분석된 것이다. 수학적으로 수용가능 한 설명과 설명 방법에 대한 규범은 수학적 말하기와 관련 된 것이라면, 이 규범은 그 풀이를 수학적으로 쓰는면에서 초점을 맞춘다.

한국의 수석교사의 수업에서는 실물화상기 위에 학생들의 풀이를 올려놓고 설명을 하는 활동, 칠판에 문제를 해결하고 교사가 설명해주는 활동에서 주로 “문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범”이 발현되는 것으로 분석되었다. 싱가포르의 리드교사의 수업에서도 학생들이 칠판에 해결한 풀이를 해설해 주면서 이 규범이 발현되었다. 즉, 이 규범은 모두 학생들의 풀이가 교실에서 논의 될 때 발현되는 것으로 확인할 수 있었다. 이때 교사들은 학생들이 작성한 풀이 및 증명을 바탕으로 그것을 훼손하지 않고 수정하면서 설명해 나간다. 이는 학생이 쓴 것과 그것을 교정한 것이 한꺼번에 잘 드러날 수 있도록 하는 전략적 선택이라 할 수 있다.

한편 두 교실에는 모두 실물 화상기가 배치 되어있는데 그것의 활용면에서 차이를 보였다. 한국의 수석교사는 실물화상기를 통해 학생이 직접 작성한 풀이를 학생들과 공유하기 위해서 사용하였다. 수석교사의 수업에서는 학생들이 작성한 것을 실물 화상기를 이용해서 보여주고, 학생들이 작성한 풀이에 부족한 점이 발견되었을 때는 즉각적으로 다른 학생들의 풀이를 보여줌으로써 다양한 풀이를 많은 학생들이 공유하여 볼 수 있게 하였다. 따라서 실물 화상기를 통한 이러한 활동에서 “문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범”이 빈번히 발생하였다. 반면 싱가포르의 리드교사의 수학교실에서 실물 화상기는 도형의 닮음을 설명하기 위한 프로젝터 역할을 하는 도구로 활용되었다.

“문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범”에 대하여 한국의 수석교사의 수업과 싱가포르의 리드교사의 수업에서는 다음과 같은 양상이 나타났다.

<표 V-42> 문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범 양상

문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범		
	한국의 수석교사 수학수업	싱가포르 리드교사 수학수업
공통점	• 논리의 순서에 맞추어 풀이과정을 작성 함(3-E9) • 해결 과정에 필요한 것 이상을 쓰지 않음(3-Ep)	• 논리의 순서에 맞추어 증명을 작성 함(1-E4) • 증명에서는 필요한 것 이상을 쓰지 않음(2-E6)
차이점		• 증명에는 근거가 되는 사실(given 또는 수학적 성질)을 기술해야 함(2-E6) • 증명에서 쓰는 수학적 성질에 대한 용어는 정확해야 함(1-E2) • 괄호를 이용하여 진술에 대한 근거를 설명함(1-E2) • 수학적 근거가 잘 드러나게 증명을 쓸 것(1-E2) • 증명에서 주로 사용하는 “Since” 그리고 “∴”의 용법을 따라야 함(2-E6)

리드교사의 수업에서 어떻게 증명을 쓸 것인지에 대한 규범과 관련하여 교실에서 만들어낸 의미는 비교적 다양하게 나타났다. 위와 같은 의미를 형성하는 과정에서 리드 교사의 직접적인 설명을 통해서 학생들의 참여를 유도하는 경우가 많았다. 특히, 싱가포르 리드교사의 수업에서 나타난 증명쓰기에 대한 규범의 의미가 구체적이다. 그리고 실제 교실에서 나타나는 증명은 수학적으로 간결하다는 특징을 보였다.

앞서 싱가포르와 한국의 수학교과서에 합동과 닮음에 대한 정당화 서술의 차이를 보여준 [그림 Ⅲ-13]과 [그림 Ⅲ-14]를 떠올려보자. 한국과 싱가포르 수학교실에서 합동조건을 학습하면서, 정당화의 과정을 어떻게 기술 하고 있을지를 추측해 볼 수 있게 한다.

한국의 수학교과서에서 기술된 ASA합동에 대한 설명은 리드교사의 교실에서 구현된 “문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범”에 비추어 보면 몇 가지 수정할 부분이 생긴다. 먼저, “증명에는 근거가 되는 사실(given 또는 수학적 성질)을 기술해야”하는데, 삼각형의 내각의 합이 180° 임을 사용하였으나 그 근거를 “괄호를 이용하여” 제시하지 않았고, 증명에서 사용한 각의 크기와 변의 길이가 문제에서 주어진 것임을 정확하게 기술하지 않았다는 점이다.

한국의 수석교사와 싱가포르의 리드교사에게 [그림 Ⅲ-13]과 [그림 Ⅲ-14][22]를 동시에 제시하고, 두 증명 쓰기에 대하여 차이가 있다면 무엇으로 생각하시는지 물었다. 한국의 수석교사와의 인터뷰에서는 자연스럽게 엄밀하고 정확한 용어를 사용하는 것에 대한 논의로 이어졌다. 즉, 평가에서 정확한 수학적 성질의 이름을 사용하지 못하고, 그 의미를 나열하여 풀이를 작성했다고 했을 때, 그것을 어떻게 평가할 것인지에 대해 물었고, 그것에 대하여 수석교사는 수학적 말하기라는 수행평가와 서술형 평가로 구분하여 설명하였다.

수석교사: 무엇을 평가하고자 하는 가에 따라 다른데, 평가 요소가 무엇인지에 따라 달라지는데, 이걸 만약 말하기 평가에서 (정확한 용어 없이 성질의 의미를 나열식으로)그렇게 했다고 하면, 감점요소가 돼요. 수학 용어를 사용해서 내 문제해결 과정을 공유할 수 있게 해야 하기 때문에. 그런데 지필 평가에서는 (정확한 용어 없이 나열식으로 그 의미를 풀어 쓴 경우) 그렇게 썼다 그러면, 틀린게 아니죠.

수석교사는 수학적 말하기 평가에서는 엄밀한 수학적 용어를 사용하는 것이 평가의 목적으로 두기 때문에, 정확하게 사용할 것을 강조한다고 설명하였다. 반면, 서술형 평가의 평가목적은 논리적인 근거를 알고 기술할 수 있는지에 강조를 두고 있는 것으로 분석된다. 따라서 수학적 성질에 대한 정확한 용어를 사용하는 것을 엄밀하게 요구하고 있지는 않는 것으로 분석된다.

22) 한국의 교과서는 영문으로 번역되어 제시되었다.

싱가포르 리드교사의 응답은 한국의 수석교사의 응답과는 차이를 보였다. 특히 싱가포르 리드교사에게는 한국의 교과서처럼 풀이를 기록한다면, 평가할 때 감점이 되는지도 물었다.

리드교사: Conceptually, the two proofs are the same, that is, both make use of ASA Test. However, in Singapore, we require students to write the reason for each statement why two angles/sides are equal. Thus, if a student were to write his/her solution like Figure 2(한국의 교과서를 의미함), he/she will generally be penalised.

리드교사의 설명은 자신의 수학교실에서 구현했던 사회수학적 규범에 따라 답한 것임을 확인할 수 있었다. 즉, 주어진 각과 변이 왜 같은지 각각의 명제에 근거를 제시해야 하기 때문에 학교시험을 평가하는 과정에서는 감점이 있을 것이라는 점이다.

수학적으로 엄밀한 용어에 대하여 한국의 수석교사의 설명과 싱가포르의 리드교사의 설명은 수학적 말하기와 쓰기의 강조에 차이가 있는 것으로 분석된다. 즉, 한국의 수석교사의 수업에서는 구어적 의사소통이 쓰기보다는 비교적 더 강조되는 수업 활동이었던 반면, 싱가포르 리드교사의 수업에서는 기호적 표현 방법이 더 강조된 수업으로 분석된다.

싱가포르의 리드교사는 “수학적으로 쓰기”가 “수학적으로 말하기”보다 더 강조되는 수업을 분석되었으며 동의하는지를 묻는 연구자의 질문에 다음과 같이 설명 하였다.

리드교사: Though both “writing mathematically” and “speaking mathematically” are equally important, it is inevitable that the former is more emphasized than the latter in my lessons as it is the written form that we are able to ascertain that students have learnt the necessarily mathematical terminology and language.

리드교사는 둘 다 강조될 필요성이 있으나, 학생들이 수학적으로 필요한 용어와 언어를 학습했는지 “수학적으로 쓰기”를 통해 확인하기 때문

에 수업에서 더 강조되는 것은 불가피 하다고 설명하였다.

수학적 표현을 어떻게 쓰는 것이 좋은가에 대한 규범은 수학적으로 오류가 있는 표현은 아니지만, 더 통용되는 수학적 표현의 방법에 관한 것이다. 한국의 수석교사의 수업에서는 5.40%, 싱가포르 리드교사의 수업에서는 3.70%로 비교적 각 사례에서 적은 비율을 차지하였다. 한국에서 수석교사의 수업에서는 문자를 이용한 식을 나타낼 때, 통용되는 표현(3-E7, 5-E11)으로 이 규범이 발현된 반면, 싱가포르 수석교사의 수업에서는 증명을 읽는 독자가 쉽게 이해할 수 있도록 수학적 아이디어를 진술하는 방법적인 면(1-E9)에서 논의되는 것으로 나타났다.

무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대한 규범은 수석교사의 교실에서 21.62%, 리드교사의 교실에서는 3.7%가 나타났다. 이 규범은 학생들이 풀이를 칠판에 작성하고, 그것을 교사가 또는 학생이 설명하는 과정에서 교실 구성원들이 그 풀이 방법에 대해 논의하는 상황에서 발생하였다. 수석교사의 수업에서는 매 차시마다 학생들의 풀이를 공유하는 활동이 포함되어 있었기 때문에, 높은 비율을 보였으며 그 양상도 다양하였다. 수학적 효율성에 대해 교사가 직접 무엇이 수학적으로 더 효율적인 것인가에 대해 설명하는 에피소드(3-E5, 4-E10, 6-E4, 7-E9, E14) 뿐 아니라 학생들이 직접 효율적인 풀이에 대한 규범을 이해하고 있고, 이를 보여주는 에피소드(3-E4, 7-E4, 9-E4)들도 나타남을 확인 할 수 있었다.

수학적으로 다른 아이디어에 대한 규범은 수석교사의 교실에서 10.81%, 리드교사의 교실에서는 7.11%가 나타났다. 수석교사의 수업에서는 문제해결 전략의 차이(3-E5, 7-E4, E9)와 문제 유형의 차이(4-E11)를 논의하는 과정에서 나타났으며, 싱가포르 리드교사의 수업에서는 증명의 전략에 대한 논의(1-E4, 2-E4)와 직각삼각형의 닮음 조건을 설명하면서 (2-E1) 나타났다.

나. 싱가포르 리드교사의 수업에서만 나타난 사회수학적 규범의 특징

싱가포르에서만 나타난 사회수학적 규범은 수학적 문제해결을 위해 어떻게 전략을 세울 것인지에 대한 규범으로 문제해결 전략을 구상하기 위한 메타인지, 발견술, 문제해결 단계 등에 대한 논의를 통해서 발현된다. 이 규범은 싱가포르 리드교사의 수업에서 나타난 규범 전체의 40% 이상을 차지한다. 따라서 이 리드교사의 수업에서 나타나는 가장 주요한 특성이라 할 수 있다.

이 규범은 교사가 문제를 해결(또는 증명)하는 과정에서 자신의 생각과정을 의도적으로 드러내어 설명하는 에피소드 중심으로 나타났다. 이 규범과 관련하여, 교실에서 만들어 내는 양상은 다음과 같다.

- 문제 읽고 이해하기, 전략 생성하기, 해결, 반성 이라는 문제해결 과정 따르기(1-E2, 2-E2, 3-E2)
- 증명을 위한 (거친) 아이디어 생성하기(계획 수립)(2-E2, E10)
- 수정 가능성을 두고 (거친) 아이디어 적용하기(계획 실행)(2-E2, E10)
- 스스로에게 질문하기(3-E1, E2)
- 자신이 지금 하고 있는 생각에 대해 생각하기(3-E1)
- 귀납적으로 추론하기(4-E2, E3, E4)

싱가포르의 수학과 교육과정에서 문제해결을 통한 메타인지적 기능을 발달시키는 것을 교육의 목표로 강조한다. 싱가포르의 교육은 3번의 국가시험을 통해 성취 수준에 따라 향후 진학과 관련하여 단계를 엄격하게 구별하고, 다양한 수준(단계)에 따라 기대되는 세부 교육 목표를 세운다. 그러나 싱가포르의 수학과 교육과정은 모든 수준(O-level, N(A)-level, N(T)-level)에서 성취해야 하는 목적 중 하나로 메타인지 기능을 포함하고 있다.

The broad aims of mathematics education in Singapore are to enable students to:

- development cognitive and **metacognitive skills through a mathematical approach to problem solving;** and (MOE, 2012, p.7)(진하게 표시는 강조하기 위해 저자가 표시한 것임)

이 규범은 자신의 생각을 모니터링하고, 사고하는 방법을 길러주기 위한 교사의 설명을 중심으로 나타났다. 리드교사는 수업시간에 메타인지나 발견술과 같은 직접적인 표현을 사용하지 않지만, 폴리아의 문제해결의 4 단계를 지속적으로 언급하며 교사가 증명과정에게 스스로에게 하는 질문을 말로 표현하고, 학생에게도 자신에게 질문하면서 증명을 해 나가도록 유도한다.

메타인지는 펜타곤 모형이라 불리는 싱가포르의 수학과 교육과정의 핵심이 되는 수학적 틀에 한 부분이다. 이 수학적 틀은 1992년부터 싱가포르 수학 교육과정에서 지속적으로 강조되어 온 것이다. 오각형의 모형은 수학적 문제해결을 위한 기저, 지지대, 그리고 지붕의 의미를 함축하는데, 수학적 문제해결 중심에 두고 수학적 문제해결을 위한 기적에는 ‘수학적 개념’이 필요하며, 문제해결을 지탱하는 ‘기능’과 ‘수학적 과정’, 그리고 수학적 문제해결을 통해 긍정적인 ‘태도’를 형성하게 하고 ‘메타인지’적 활동을 경험하도록 해야 한다는 것이다(Yeb, 2016).

또한 싱가포르 2007년부터 수학과 교육과정에서 ‘수학적 과정’을 ‘추론’, ‘의사소통 그리고 연결’, ‘적용과 모델링’, 그리고 ‘사고 기능과 발견술’ 4가지로 두었으며, 특히 ‘사고 기능과 발견술’은 2001년부터 수학적 과정으로 교육과정에 명시되었고 수학 교수학습 과정에서 지속적으로 강조 되었다(Kaur, 2014).

연구참여자 검증과정에서 진행된 서면 인터뷰를 통해, 리드교사는 문제해결과 이를 통한 메타인지적 사고 교육의 필요성을 싱가포르의 교육과정과 일관성이 있게 설명하고 있음을 확인할 수 있었다.

연구자: 문제해결을 위한 발견술과 메타인지 기능이 강조되는 수업으로 분석되

었습니다. 이에 동의하시는 지요? 이러한 특징이 싱가포르의 교육과정, 교과서 또는 평가와 관련되어 나타나는 현상으로 볼 수 있을까요?

리드교사: Yes, the teaching of thinking skills, problem solving heuristics and metacognition skills are often emphasized in my lessons, as these are essential skills for mathematical problem solving.

One of the aims of mathematics education in Singapore, besides to enable students to acquire and apply mathematical concepts and skills, is also to enable students develop cognitive and metacognitive skills through a mathematical approach to problem solving.

Learning mathematics is more than just learning concepts and skills. Equally important are the cognitive and metacognitive process skills. These skills are learnt through carefully constructed learning experiences whereby students are provided with opportunities to develop metacognitive awareness and strategies, and know when and how to use the strategies. Students are also often given the opportunities to discuss their solutions, to think aloud and reflect on what they are doing, and to keep track of their work processes and make changes when necessary. It is important that students consolidate and deepen their learning through reflecting on their learning. This is a good habit that must be cultivated at this early learning stage.

수학적 문제해결이 싱가포르의 교육과정에서 중심으로 나타난 시기는 1992년이다. 1980년대 소규모 학교를 대상으로 수학적 문제해결 교육을 시범적으로 실시하고 1992년부터 전국적으로 수학적 문제해결을 강조한 펜타곤 모형을 각 학교급의 1학년부터 도입하였다. 이 모형에 대한 설명은 [그림 Ⅲ-2]와 <표 Ⅲ-2>를 참고하여라.

이 모형을 도입하게 된 배경에는 1980년대까지 싱가포르 학생들의 수학 성취도가 국제적인 평균보다 낮은 문제의식에서 싱가포르 내에서 수학교육을 개혁하려는 움직임이 있었기 때문이다. 1980년대는 수학교육에서 문제해결의 시대라고 부를 정도로 수학적 문제해결을 강조하였다. 영국의 Cockcroft Report는 수학의 핵심으로 문제해결을 강조하였고,

NCTM의 “Agenda for action"에서도 학교교육의 주제로 문제해결을 강조하였다. 싱가포르는 당시 국제적인 수학교육의 동향을 파악하고 문제해결을 중심으로 하는 수학과 교육과정을 개정하기에 나섰고, 그것이 구현된 것이 1992년이며 펜타곤 모형이다. 그 이후 이 모형은 25년이 지난 지금도 싱가포르 수학교육의 교수 학습 방법의 방향을 제시하는 중요한 역할을 하고 있다(Yeb, 2016).

리드교사가 자신의 수업과 인터뷰에서 보여준 것과 같이 국가의 교육과정의 목적과 방향에 일관성 있는 태도를 보일 수 있었던 것은 이러한 국가 교육과정의 비전으로 장기간 유지되었기 때문으로 해석 된다. 싱가포르는 문서화된 교육과정과 실행된 교육과정 사이에 차이가 좁은 편으로 분석된다(Kaur, 2009). 싱가포르에서는 교육부가 모든 학교에서 실행하는 교육과정을 모니터링하고 조절하며, 성취 규준에 맞추기 위하여 평가 가이드를 제공하고, 교수 지도법등을 제공한다. 그리고 지속적으로 교사가 자기 발전을 도모할 수 있도록 지원을 하며, 교육부는 교사들에게 학문의 기회를 많이 제공하는 것으로 조사되었다(Lee, 2001). 동일한 비전을 유지하고 그것을 지지하는 상황아래 싱가포르의 수학과 교육과정은 개별 수학교실에서 실행 가능성을 증진 시켰다.

실행된 교육과정과 문서화된 교육과정 사이의 차이가 적은 현상은 교육부의 지속적인 지원 뿐 아니라 싱가포르의 단일 교사교육기관인 NIE에서도 찾아 볼 수 있다. 싱가포르의 교사 교육은 초기 연수(Initial Teacher Training: ITT)와 지속적 연수(Continual Training)로 구분되는데, 초기 연수는 기초 연수와 유도 연수로 또 나눠진다. 기초 연수는 교사들을 위한 교육 가치를 고조 시키는 연수이며, 교수 지식과 핵심 기술 및 능력은 기초 연수 이 후에 강조된다. 학교와 교육부는 교사 임기 첫 해에 기본적인 훈련과 유도 연수를 제공하여 교사들로 하여 학교문화와 가치에 익숙해지게 한다. 또 첫 일 년 동안 신임교사에게는 일반 책임량의 4/5정도를 부여하여 학급을 참관하고 현장에서 직업 연수를 받을 수 있도록 한다. 이러한 교사교육은 NIE 한 곳을 중심으로 하면서도 일선 학교의 필요에 보다 능동적으로 대처 할 수 있도록 되어 있다(Lee, 2001).

그러나 교육과정이 바뀌었다 해도 처음부터 수학적 문제해결을 목적으로 하는 수업으로의 변화가 극적으로 이루어 졌던 것은 아니었다. 수학 교수학습을 위한 새로운 비전을 가지고 개념을 이해하기 위한 정형화된 학습에서 수학적 문제해결 활동에 참여하며, 수학적으로 의사소통하는 수업이 되도록 하였으나 Foong(1993)의 연구에 의하면 싱가포르 선생님들이 여전히 전통적인 방식으로 알고리즘과 규칙을 따르도록 학생을 가르치는 것으로 나타났다. Ho & Hedberg(2005)의 연구에서는 평가와 수업 실행과의 간극의 문제점을 지적 하였다. 즉, 국가시험을 준비시키기 위해서는 수업시간에 그룹 활동을 하는 것보다 기존의 수업 방식을 고수하는 것이 효과 생각하는 교사들의 딜레마를 지적하기도 하였다.

1992년 수학적 문제해결이라는 목적으로 새롭게 도입된 교육과정에 기초하여 PSLE 국가시험은 1997년이 처음 치러졌다. Yeb(2016)은 당시 새로운 교육과정에 기초하여, 시험 점수의 1/3에 해당하는 문제가 이전과는 다른 새로운 형태의 문제로 제시되었으며, 이러한 국가단위의 시험에서의 문항의 성격의 변화가 점진적으로 교수학습 방법의 변화를 이끌었다고 보았다.

싱가포르 교실에서 이루어지는 문제해결과정에서의 발견술의 효과성을 조사한 Wong & Lim-Teo(2002)는 싱가포르 수학교실에서 일반적으로 사용되는 다섯 가지 발견술을 밝혔다. 그것은 그림그리기, 체계적으로 순서 메기기, 패턴을 찾아보기, 도표를 작성해 보기, 가설 세우기 등이다. 명백히 발견술을 지도하는 것이 진정 비정형화된 문제를 해결하는데 효과적으로 작동을 하는지에 대해서는 논란의 여지가 있지만, 리드교사의 수업에서는 Wong & Lin-Teo(2002)이 발견한 발견술에서 가설 세우기와 귀납적 추론으로 패턴을 찾아보는 것으로 해석할 수 있다. 리드교사의 6차시의 수업에서 나타난 발견술은 싱가포르 수학교실에서 일반적으로 사용되는 발견술의 한 부분으로 볼 수 있다.

다. 한국 수석교사의 수업에서만 나타난 사회수학적 규범의 특징

한국의 수학교실에서만 나타나 사회수학적 규범은 두 가지로 어떤 문제가 더 좋은 문제인지에 대한 규범과 무엇이 수학교실에서 받아들여질 만한 내용인지에 대한 규범이다. 각각은 수석교사의 수업에서 8.10%, 5.40 %로 나타났다. 수석교사의 수업에서 나타난 사회수학적 규범에서 이 두 규범이 차지하는 비율은 적은편이다.

어떤 문제가 더 좋은 문제인지에 대한 규범은 문제 만들기 수업 활동에서 자주 나타났다. 즉 수업 시간에 학생들은 조별로 문제를 만들고 그 문제를 해결하는 활동을 자주 하는데, 어떤 문제가 더 좋은 문제인지 또 어떤 문제가 더 어려운 문제인지 등을 논의하게 된 것이다.

2009 개정 수학과 교육과정에서는 수학적 문제 만들기는 초등학교 5-6 학년군의 교수ㆍ학습상의 유의점에 “조건을 바꾸어 새로운 문제 만들기 (한국과학창의재단, 2011, p. 152, p. 156)″로 등장한다. 2015년 개정 수학과 교육과정에서는 초등교육과정에서는 ‘수학의 기능’의 하나로 문제 만들기가 있으며, 중등 교육과정에서는 “문제 해결 능력을 함양하기 위한 교수ㆍ학습에서” 강조할 내용으로 “주어진 문제를 변형하거나 새로운 문제를 만들어 해결하고 그 과정을 검증하는 문제 만들기 활동을 장려(교육부, 2015, p,38)”하는 것으로 기술되어 있다. 교수학습 전략으로 문제 만들기를 주로 사용하는 이유가 무엇인지에 대한 연구자의 질문에 수석교사는 다음과 같이 응답하였다.

> 수석교사: 주어진 문제를 푸는 것보다는 문제를 만드는 아이들이 <u>문제에서 필요한 조건들을 따질 줄 알고, 비판적으로 생각할 수 있는</u> 여지가 많으니까. 그리고 그 역량을 키우는 것은 <u>질문하는 아이들이</u> 그런 역량을 키우기 위한 거죠.

수석교사의 수업활동이 교육과정을 구현하기 위해서 또는 그것과 연관성을 가지고 실행된 것으로 해석하기에는 무리가 있다. 이러한 활동은 수

석교사가 중요하게여기는 “질문하는” 역량을 키워주기 위한 개별 교사의 교수전략으로 이해된다.

어떤 개념이 수학교실에서 논의될 수 있는가에 대한 규범은 선행학습으로 알게 된 내용을 교실 수업으로 가지고 오지 않을 것 그리고 수업 시간에 다루지 않은 유형의 문제를 제시하지 않을 것과 같은 의미들이 교실 안에서 형성되어 있음을 확인할 수 있었다.

이러한 사회수학적 규범이 한국의 수석교사의 수업에서만 나타나게 되는 근거는 무엇이었을까? 이러한 현상은 한국의 일반적인 수학교실에서 나타나는 현상일 것인가? 수석교사와 진행한 참여 관찰 기관의 인터뷰와 검증 인터뷰는 이 또한 수석교사의 개별적 특성에 기인하는 점이 크다는 것을 보여준다. 참여관찰 이후 수석교사와 진행된 인터뷰에서 중등 수학교육의 목적과 가치에 대하여 자신의 생각을 구체적으로 설명하였다.

수석교사: 저는 제 수업의 목표가 인지적 성장이 아니 예요. (…) 아이들이 살아가면서 더불어 살아갈 줄 아는 사람들로, 그런 품성들을 내면화 시키는 것 그것이 중등교육의 목표라고 생각해요. 인지적인 것, 지적인 전문성은 대학교육의 목표인 거예요. 중학교 아이들 보편교육의 목표는 아이들을 어떤 조직 사회 속에 가 있어도, 함께 할 수 있는 사람들로 만들어 놓는 것이 목표라고 생각해요.

수석교사: 수학교사는 수학이라는 것을 도구로 해서 궁극적인 교육의 목표를 이뤄야 하는 사람이라고 생각하거든요. 수학은 목적이 아니라 수학은 도구예요. 저에게. 감정적으로 만이 아니라 생각하는 인간으로서 공동체에 기여할 수 있는 사람을 성장하게 해야 한다. 생각하는 방법을 배우는 교과가 수학이기 때문에 거기에 수학의 중요성이 있는 것이지, 생각 없이 감정적으로 아무렇게나 하면서 온전한 인격체로 성숙한 인간일 수 없잖아요. (…) (수학을 통해) ‘나는 너고 너는 나’임을 깨닫는 것, 그것이 내면화 되는 것

‘더불어 살아갈 줄 아는’ 인격체로서의 성장을 중등교육의 목표로 생각하는 교사는 수학은 그것을 함양하기 위한 도구적 교과라고 보았다.

이 때 그녀가 생각한 수학교육의 도구적 역할은 크게 두 가지로 나누어질 수 있는데, 하나는 그 내용을 이용하여 '더불어 살아가는' 행위를 학습하는 것이고, 다른 하나는 수학 학습을 통해, 생각하는 방법을 학습하는 것이다. 생각하는 방법을 가르치는 도구로서 수학교육의 가치는 수학교과 특수하게 강조되는 교실 규범과 밀접하게 연관이 되어 있다.

어떤 개념이 수학교실에서 논의될 수 있는가에 대한 규범과 관련하여 연구 참여자 검증에서 진행된 인터뷰에서 교사는 다음과 같이 설명하였다.

> 수석교사: 지금 애들이 나와 무관하게 배워진 것으로 수업시간에 발언하게 만들어 지면 안 된다고 생각해요. (…) 어떻게 이것을 극복할 것인지에 대한 고민이 많지 않아요. 평가도 안 바뀌고 수업도 안 바꾸고. (…) 수업시간에 무엇을 칭찬할 것인가? 지난시간 보나 나아진 성장에 초점을 맞추어 칭찬을 할 것인가 아니면 수월성 더 잘하는 학생을 칭찬할 것인가. 지금 (한국의)수업시간에 일어나는 칭찬의 장면은 교사의 말에 알겠다 이해하고 그대로 풀 수 있으면 된다고. 그런데 그것은 미래형 교육과정에서 나타난 중요한 가치들이 아니 예요. 교사가 그런 걸 강조하면 안 된다고. 그러면 사교육이 더 심해지지

수석교사가 수업 시간에 어떤 개념이 수학교실에서 논의될 수 있는가에 대한 규범을 구현하려 했던 것은 한국의 사교육의 문제와도 관련되어 있다. 이 규범이 수석교사의 수업에서만 나타나는 독특한 규범일지라도 이 규범을 발현하게 하는 기저가 된 한국 교육의 문제점에 대한 인식은 모든 수학교사가 공유 할 수 있을 것이라는 점에 주목할 필요가 있다.

VI. 결론 및 논의

1. 요약

이 연구는 한국의 수학교실의 문화적 특성을 이해하기 위한 시발점이자, 수학교실 비교 연구에서 한국의 수학교실의 관심을 촉구하기 위한 필요성에 의해 진행되었다. 국제 학업 성취도 평가에서 우수한 성과를 보인 싱가포르에 대한 교육계의 관심이 증대 되고 있는 시점에, 한국과 싱가포르의 수학교실에서 실제 일어나는 교수 상황을 비교 분석하여, 두 나라의 수학교실에서 나타나는 교실 문화의 특성을 분석하고자 하였다. 이 연구에서 한국과 싱가포르의 학교 현장에서 가르치고 있는 수학 교사 중에서 가장 상위 직위를 가지는 수석교사와 리드교사의 수업을 사례로 선정하였다.

특히 수학교실의 문화적 특성을 해석하기 위하여, 구성주의 관점과 사회문화적 관점을 통합한 Paul Cobb의 사회수학적 규범을 중심으로 미시적인 교실 문화를 탐색하였다. 사회수학적 규범은 수학교실 상황에서 수학적 설명과 정당화에 관련되어 나타나는 상호작용을 나타내고, 수학 교수학습의 질을 반영해 준다는 점에서도 중요한 역할을 한다. 특히 사회수학적 규범이 나타나는 교실 공동체를 실천공동체 관점으로 해석하여, 사회수학적 규범이 실천공동체의 참여와 객체화의 과정에서 어떻게 나타나는지 해석하였다.

또한 교실 수업은 교사와 학생들의 미시적인 상호작용 뿐 아니라, 보다 바깥 수준에서 영향을 주고받는다. 수학교실 문화는 학교와 제도, 그리고 보다 거시적 수준의 사회문화적인 상황으로부터 영향을 주고받는다. 교실 수준, 학교수준, 사회문화적 수준의 수업상황들은 서로가 분리되어 독립적으로 존재하지 않기 때문이다. 어느 수준에서의 특성이 수학교실의 문화를 형성하는데 더 많은 영향을 주는지를 논할 수 없으며, 교

실 안의 형성되는 미시적인 문화적 현상과 교실 밖에서 영향을 주는 상황을 동시에 고려할 필요가 있다.

이에 연구자는 각 나라의 수학교실의 미시적인 수학교실 문화의 특성과 거시적인 관점에서 각 미시적인 문화적 현상을 해석하려고 시도하였다. 특히 분석 자료로 수집될 수 있는 제도적 차원에 초점을 맞추어 국가 교육과정, 교과서 그리고 평가체제를 중심으로 해석하였다.

한국의 수석교사의 9차시 수업과 싱가포르 리드교사의 6차시 수업이 참여관찰 하였고, 수업에서 발생한 담화를 중심으로 사회수학적 규범을 분석하였다. 각 수업 사례에서 나타난 사회수학적 규범을 학교 밖의 제도적 차원과의 관련성을 해석하기 위해 관련 문서와 선행연구를 분석함과 동시에 연구참여자의 검증 인터뷰를 진행하였다.

한국과 싱가포르의 수학수업을 미시적으로 분석한 결과 두 수학수업 사례에서 나타난 사회수학적 규범은 8가지로 나타났다. 그 중 다섯가지의 규범은 한국의 수석교사의 수업과 싱가포르의 리드교사의 수업에서 공통적으로 나타났고, 싱가포르의 리드교사의 수업에서만 나타나는 사회수학적 규범 한가지와 한국의 수석교사의 수업에서만 나타나는 사회수학적 규범 두 가지를 분석하였다.

두 수업 사례에서 공통적으로 나타난 사회수학적 규범은 ‘수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범’, ‘문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범’, ‘무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대한 규범’, ‘수학적으로 다른 아이디어에 대한 규범’, ‘수학적 표현을 어떻게 쓰는 것이 좋은지에 대한 규범’ 이다. 그리고 싱가포르에서만 나타난 사회수학적 규범은 ‘수학적 문제해결을 위해 어떻게 전략을 세울 것인지에 대한 규범’이며, 한국의 수학교실에서만 나타나 사회수학적 규범은 ‘어떤 문제가 더 좋은 문제인지에 대한 규범’과 ‘무엇이 수학교실에서 논의 될 만한 내용인지에 대한 규범’이다.

두 나라에서 공통적으로 발견된 사회수학적 규범은 이미 선행연구를 통해서 밝혀진 사회수학적 규범이 대부분이었다. 그러나 두 수업 사례에서 같은 사회수학적 규범으로 코딩되었어도 그 실천공동체의 관점에서

분석하여 밝힌 사회수학적 규범의 양상에는 차이가 있음을 확인할 수 있었다. 연구 질문별로 발견한 연구결과를 정리하면 다음과 같다.

첫째, 한국의 수석교사의 수학수업 사례에서 나타난 사회수학적 규범은 무엇인가?

수석교사의 수업에서는 일곱 가지 사회수학적 규범이 나타났다. 주로 나타난 사회수학적 규범은 수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범과 무엇이 수학적으로 더 효율적인 풀이인지에 대한 규범으로 수석교사의 수학교실에서 나타난 사회수학적 규범 중에서 각각 35.13%, 21. 62%를 차지하며, 두 규범이 수석교사의 교실의 사회수학적 규범의 55%이상을 차지하고 있음을 확인할 수 있었다.

수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범은 이 교실에서 차지하는 비율이 가장 높은 만큼 다양한 양상으로 나타났다. 이 규범과 관련하여 수석교사의 수업에서는 1) 수학적 설명은 근거가 있어야 하고 타당해야 함, 2) 수학적으로 정확한 용어로 설명하는 것이 좋음 3) 수학적 용어를 설명할 때에는 애매한 표현으로 설명하지 않음 4) 설명할 때 교과서 또는 활동지에 있는 것을 그대로 말하지 않음 5) 순환논리로 설명하지 않음 6) 설명은 답을 확인하는 것이 아니라 답을 구하는 과정이어야 함 7) 반례는 문제의 조건을 고려하여 찾아야 함 8) 동료들의 풀이를 기반으로 그것의 오류를 보완하며 설명함 9) 전체 학생들 앞에서 발표할 때에는 질문형식으로 발표함과 같은 양상이 분석되었다. 또한 이러한 양상을 만들어가는 과정에는 학생 중심의 논의와 교사의 설명 과정에서 나타났으며, 이러한 규범적 의미를 만들어내는 다양한 의미협상의 과정을 확인할 수 있었다.

문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범은 수석교사의 수업에서 13.51% 나타났고, 논리적인 순서에 맞추어 풀이과정을 쓸 것, 그리고 해결과정에 필요한 것 이상의 불필요한 것을 쓰지 않을 것이라는 양상이 나타났다.

수학적 표현을 어떻게 쓰는 것이 좋은지에 대한 규범은 한국의 수석교사의 수업에서는 5.40%로 나타났고, 비교적 각 사례에서 적은 비율을 차지하였다. 수석교사의 수업에서는 문자를 이용한 식을 나타낼 때, 통용되는 표현을 설명하면서 이 규범이 발현되었다.

무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대한 규범은 수석교사의 교실에서 21.62% 나타난 규범으로 수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범과 함께 높은 비율을 보이는 규범이다. 풀이의 길이, 반복되는 표현의 생략 가능성, 우연에 기댄 풀이보다 전략적 풀이의 효과성과 같이 다양한 양상을 보였다.

수학적으로 다른 아이디어에 대한 규범은 수석교사의 교실에서 10.81%의 비율을 차지하였으며, 모두 문제해결 전략의 차이와 문제 유형의 차이를 논의하는 과정에서 나타남을 확인하였다.

무엇이 수학교실에서 논의 될 만한 내용인지데 대한 규범은 선행학습으로 알게 된 내용을 교실 수업으로 가지고 오지 않을 것 그리고 수업시간에 다루지 않은 유형의 문제를 제시하지 않을 것과 같은 의미들이 교실 안에서 형성되어 있음을 확인할 수 있었다.

어떤 문제가 더 좋은 문제인지에 대한 규범은 수업시간에 다룬 내용으로 해결할 수 있는 문제, 주의 하지 않으면 실수하기 쉬운 문제가 좋은 문제로 여겨지는 양상을 확인하였다.

둘째, 싱가포르의 리드교사의 수학수업 사례에서 나타난 사회수학적 규범은 무엇인가?

리드교사의 수업에서는 여섯 가지 사회수학적 규범이 나타났다. **수학적 문제해결을 위해 어떻게 전략을 세울 것인지에 대한 규범**이 주로 나타났으며, 전체 사회수학적 규범의 약 40.74%를 차지하였다. 특히, 이 규범은 싱가포르 리드교사의 수학수업에서만 나타난 규범으로 수학적 문제해결 전략과 관련된 규범은 교사의 메타인지 전략의 활용과 밀접하게 관련이 되어 나타났다. 문제해결 전략을 따르기, 증명을 위한 (거친) 아

이디어 생성하기, 수정 가능성을 두고 (거친) 아이디어 적용하기, 스스로에게 질문하기, 자신이 지금 하고 있는 생각에 대해 생각하기, 귀납적으로 추론하기가 이 규범과 관련하여 나타난 양상들이다.

수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범은 리드교사의 수업의 25.93%에서 나타나 '수학적 문제해결을 위해 어떻게 전략을 세울 것인지에 대한 규범'과 함께 자주 나타나는 사회수학적 규범이다. 이 규범은 수학적 설명은 근거라 있어야 하고 타당해야 하며, 정확한 수학적 용어를 사용해야 한다는 양상이 나타났다.

수학적 표현을 어떻게 쓰는 것이 좋은가에 대한 규범은 수학적으로 오류가 있는 표현은 아니지만, 더 통용되는 수학적 표현의 방법에 관한 것이다. 싱가포르 리드교사의 수업에서는 3.70%로 비교적 적은 비율을 차지하였다. 이 교실에서는 증명을 읽는 독자가 쉽게 이해할 수 있도록 수학적 아이디어를 진술하는 방법적인 면에서 이 규범이 논의 되었다.

무엇이 수학적으로 더 효율적인지에 대한 규범은 리드교사의 교실에서 3.70%로 낮은 비율을 보였으며, 불필요한 계산에 대한 것이 수학적으로 비효율적인 것으로 나타났다.

수학적으로 다른 아이디어에 대한 규범은 리드교사의 교실에서 7.11%가 나타났다. 증명의 전략에 대한 차이나 직각삼각형의 닮음 조건을 설명하면서 발현되었다.

문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범은 싱가포르 리드교사의 수업에서 18. 52%를 차지하였다. 이 규범과 관련하여 다양한 양상들이 발견되었다. 논리의 순서에 맞추어 증명을 작성 할 것, 증명에서는 필요한 것 이상을 쓰지 않음, 증명에는 근거가 되는 사실(given 또는 수학적 성질)을 기술할 것, 증명에서 쓰는 수학적 성질에 대한 용어는 정확해야 함, 괄호를 이용하여 진술에 대한 근거를 설명하는 것임, 수학적 근거가 잘 드러나게 증명을 쓸 것, 증명에서 주로 사용하는 "Since" 그리고 "∴"의 용법을 따라야 함과 같은 양상들이 나타났다.

셋째, 한국의 수석교사 수학수업과 싱가포르 리드교사 수학수업 사례에서 나타난 사회수학적 규범의 공통점과 차이점은 무엇인가?

각각의 교실에서 나타난 사회수학적 규범의 다양한 양상을 비교 하였고, 그러한 양상으로 구현되는 사회수학적 규범이 학교 밖의 제도적인 현상 특히, 국가 교육과정, 교과서, 평가 체제 등과의 관련성을 해석하였다.

수학적으로 수용 가능한 설명과 설명 방법에 대한 규범은 한국의 수석교사의 수업에서 싱가포르의 리드교사의 수업보다 다양한 양상이 나타남을 보였다. 그 중에서도 수학적 용어를 정확하게 사용하는 것이 두 수학교실에서 공통적으로 나타나는 양상으로 확인 되었다. 수학적 용어의 엄밀한 사용에 대한 한국의 수석교사와 싱가포르의 수석교사의 관점은 각 나라의 국가 교육과정과 평가와 관련하여 설명되었다.

한국의 수석교사의 수업 사례에서 밝혀진 사회수학적 규범은 한국 교사들의 대표적인 특성으로 논의하기 어려우며, 수석교사가 가지고 있는 한국 수학교육의 현상에서 학생중심의 수업, 과정 중심의 평가를 구현하기 위한 교사의 실천적 연구를 통해 발현되는 것으로 확인 되었다. 반면 싱가포르의 리드교사의 수업 사례에서 나타나는 엄밀한 수학 용어의 사용은 싱가포르 수학교실에서 비교적 일반적으로 나타나는 현상으로 분석되었으며, 특히 정확하고 간결한 수학 용어의 사용에 대한 교육과정의 지침이 장기간 유지되면서 문서화된 교육과정과 실행된 교육과정 사이의 간극을 최소화시킨 것으로 분석 하였다.

또한 문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현 할 것인지에 대한 규범은 싱가포르의 리드교사의 수업에서 한국의 수석교사의 수업보다 다양한 양상이 나타남을 확인하였다. 각 나라의 수학교과서와 지필평가의 기준을 바탕으로 싱가포르의 리드교사의 수업에서 만들어지는 수학적으로 쓰기가 한국의 수석교사의 수업에서는 만들어지는 수학적 쓰기보다 더 간결하고, 정확한 용어와 기호를 사용하는 것을 강조하는 것으로 해석되었다.

또한 싱가포르 리드교사의 수업에서만 나타난 문제해결을 위해 어떻게

전략을 세울 것인지에 대한 규범은 싱가포르의 수학과 교육과정의 목표와 일치하는 양상이 나타났다. 싱가포르의 국가 교육과정에서 강조하는 수학적 문제해결 지도가 어떻게 발전되었고, 그것이 발전되는 과정에서 국가수준의 평가의 역할을 논의하였다.

마지막으로 한국의 수석교사의 수업에서만 나타난 무엇이 수학교실에서 논의 될 만한 내용인지에 대한 규범은 수석교사의 교육철학과 맞물려 선행학습을 하고 수업에 참여하는 학생이 많은 한국의 교육의 현실과 함께 분석되었다. 이 규범이 수석교사의 수업에서만 나타나는 독특한 규범일지라도 이 규범을 발현하게 하는 기저가 된 한국 교육의 문제점은 모든 수학교사가 공유하고 있다는 점에 주목할 필요가 있다. 모든 학생들이 참여하는 수학교실 그리고 더불어 함께 학습하는 수학교실을 만들기 위한 수석교사의 노력은 교실에서 논의되지 않은 개념으로 설명하지 않기, 또한 배우지 않은 유형으로 문제를 만들지 않기라는 양상을 만들어 내었다.

2. 결론 및 논의

사회수학적 규범은 수학 교실 공동체에 참여하는 것과 관련하여 특별히 수학적인 방법을 개발하는 사회적 양상을 담는다. 교사가 교실의 사회적 구조를 활용하여 학생들에게 바람직한 수학적 신념이나 가치를 개발하도록 북돋워주고 수학적 개념에 대한 이해를 증진시키는지 못하는지를 이해하는데 매우 중요한 매체가 될 수 있다. 그동안 Cobb에 의해 진행된 사회수학적 규범에 대한 연구는 프로젝트의 해당 교사가 연구팀의 다각적인 도움을 받아서, 교실 안에서 교수법을 개혁시키고 특정한 수학 토론 양상을 전개시켜 나가는데 주력을 해왔다. 여기서 특정한 수학 토론 양상이라는 것은 교사와 학생이 함께 수학 공동체를 구성하고 수학적 주장에 관해서 정당한 근거를 제기하도록 요구하고, 다른 사람의 설명과

문제해결 방법에 도전을 제기하는 것 등을 통해서 수학적 의미를 협상해 나가는 것이다. 이 때 교사는 이러한 토론이나 대화가 점차적으로 좀 더 세련된 수학적 양상을 닮아갈 수 있도록 주의 깊게 중재하는 역할을 한다. 이 연구는 수학교실 문화 연구를 수행하면서 교사의 특정한 중재 전략의 결과로 성취되는 수학적 문화로서만 사회수학적 규범을 국한 하지 않고, 수학 토론에 관한 교사의 중재를 포함한 교사에 의해 지지되는 규범, 사고와 논의패턴, 메타인지, 논리적 추론, 문제해결을 위한 발견술 등을 포함한 개념으로 확장하였다.

이러한 확장된 개념은 비교적 교사의 세련된 설명을 중심으로 하는 싱가포르의 수석교사의 수업의 사회수학적 규범을 분석할 수 있게 하였다. 싱가포르 리드교사의 수업에서는 학생이 말로 하는 참여보다는 교사의 설명을 잘 듣고 이해하는 것 그리고 제자리에서 개별 학습을 하는 것으로 나타난다. 따라서 수학 토론에 관한 교사의 중재 역할로 사회수학적 규범을 분석하였다면 싱가포르의 리드교사의 설명과 학생들의 풀이들이 보여주는 질 높은 사회수학적 규범은 쉽게 드러나지 않았을 것이다. 특히 메타인지와 문제해결을 위한 발견술과 관련되어 싱가포르 리드교사의 수학교실에서 나타난 '수학적 문제해결을 위해 어떻게 전략을 세울 것인지에 대한 규범'은 그 교실의 전체 사회수학적 규범의 40% 이상을 차지하는 것으로 리드교사의 수업의 핵심적인 특징으로 나타났다. 교사와 학생의 질문과 대답의 연속적인 상황에서 그리고 교사가 스스로에게 던지는 질문들을 표면으로 드러내면서 이 규범은 다양한 양상으로 나타났고, 이를 구현해 내는 리드교사의 교수 실행은 그동안 설명식 수업에 대한 부정적인 관점을 깨고 그 수업에서 교사가 구현하는 담화의 질적인 수준에 관심을 기울일 필요가 있음을 보여준다.

또한 이 연구는 교실의 미시문화를 학교 밖의 거시적인 맥락에서 특히 제도적인 수준과의 관련성을 해석하고자 시도하였다. 싱가포르의 국가교육과정에서 강조하는 문제해결과 메타인지 전략은 리드교사의 수업에서 주로 나타나는 사회수학적 규범(수학적 문제해결을 위해 어떻게 전략을 세울 것인지에 대한 규범)을 형성해 나가는데 영향을 준 것으로 분석

되었다. 이는 미시적인 문화 현상인 사회수학적 규범은 제도적 수준에서 교실이 처해 있는 맥락과 연관성을 가지며 발현되고 있는 것으로 분석된다. 또한 한국의 수석교사와 싱가포르의 리드교사의 수업에서 발현된 문제해결 과정 및 증명을 어떻게 표현할 것인지에 대한 규범의 양상들은 각 나라의 지필평가에서 기대되는 형식에 따라 표현 방법 및 형식의 엄밀성 등에 차이를 보였다. 즉, 제도적 수준에서 교실이 처해 있는 교육과정이나 평가 체계는 교실의 미시적인 문화 현상인 사회수학적 규범의 발현에도 영향을 미치며, 좀 더 세부적으로 사회수학적 규범에서 보여주는 양상에도 영향을 미치고 있는 것으로 분석된다.

그동안 한국과 싱가포르의 수학교실은 동아시아 국가들과 동일한 특성을 가지고 있다고 해석되어 왔다. 그렇다면, 이러한 해석으로 한국의 수석교사의 수업과 싱가포르의 리드교사의 수업에서 공통적으로 나타난 다섯 가지 사회수학적 규범을 이해할 수 있을까? 이미 연구질문 3에 대한 답을 하면서도 설명한 바와 같이 그 다섯 가지 규범들 그 안에서 보여주고 있는 양상은 공통점보다 차이점이 더 많은 것으로 드러났다. 이 결과는 그동안 동아시아 수학교실을 거시적인 사회문화적인 맥락으로만 접근해 유교문화에 영향을 받은 수업으로 해석하려는 시도의 방향키를 재조정할 필요가 있음을 보여준다. 즉 교사와 학생들이 교실 현장에서 만들어 내는 교실 문화와 함께 거시적인 맥락이 논의 될 필요가 있음을 보여준다.

이 연구에 참여한 한국의 수석교사와 싱가포르의 리드교사는 각 나라에서 우수한 교사로 대표되는 교사이다. 최근의 몇몇 연구에서 '좋은' 수업에 대해 논의되고 있지만(Zemelman, Daniels, Hyde, 1998; Kaur, 2009), 명확한 개념 정립은 이루어지고 있지 않았으며, 주로 '좋은' 수업이 가지고 있는 특징과 관점을 제시하고 있다. 좋은 수학수업은 사회문화적 배경에 따라 나라별로 공통점과 차이가 있으며, '좋은' 수학수업에 대한 의미는 그 나라의 고유한 문화적 특성을 반영하고 있는데(Stigler & Hiebert, 1999), 여전히 좋은 수업에 대한 교사의 실천적 사례에 대한 연구가 부족한 편이다. 이 수업 사례는 그 사례 자체로서도 가치가 있다

고 볼 수 있다. 이 두 사례의 분석은 '좋은' 수학 수업에 대한 좀 더 심층적인 정보를 제공하여 '좋은' 수업의 개념을 탐색하는데 기초 자료로서 역할을 할 수 있을 것이다.

이 교사들의 수업은 각 나라에서 공유하고 있는 좋은 수업이 무엇인지에 대한 관점을 내포하고 있으며, 이들의 수업을 통해 각 나라의 좋은 수업의 이미지를 추론해 볼 수 있게 한다. 싱가포르 리드교사의 수업은 수학적으로 엄밀하고 명쾌한 설명식 수업이며, 이를 통해 학생들로 하여 수학적 기호와 용어를 논리적이며 간결하고 정확하게 사용할 수 있게 한다. 또한 그 과정에서 학생들이 자신의 사고를 모니터 하고 조절 할 수 있도록 지도하는 특징이 있다. 반면 한국의 수석교사의 수업은 깔끔한 강의식보다는 모둠수업을 통해 학습자 중심의 수업을 지향한다는 점을 확인할 수 있었다. 한국의 수석교사의 수업은 한국 교육이 가지고 있는 문제를 극복하고 교사가 가지고 있는 교육철학을 구현하고자 한 교사의 실천을 보여준다. 이를 통해 한국의 수석교사의 모습을 현재 수학교실의 문제를 개선하기 위해 지속적으로 노력하고 그것을 확산시키기 위한 실천력을 가진 교사임을 확인할 수 있었다.

한국의 수석교사 1인의 수업과 싱가포르 리드교사 1인의 수학수업을 비교 분석한 이 연구는 한국의 수학교실을 다른 나라의 수학 수업과 비교 분석함으로써, 한국의 수학교실을 보는 내부자적 관점을 풍부하게 하며, 한국 수학교실의 특성에 대한 이해의 폭을 확장시킨다. 또한 이 연구는 국제적으로 한국의 수학교실을 알리기 위한 시도로 외부자의 관점에서 한국의 수학교실을 조망하는데 도움을 줄 수 있을 것으로 기대한다.

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2011). **수학과 교육과정.** (교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책 8])

교육부 (2015). **수학과 교육과정.** (교육부 고시 제 2015-74호[별책 8].)

권점례 (2007). 초등학교 수학교실에서 사회적 관행과 정체성의 상호작용 분석. **수학교육, 46**(4), 389-406.

김신일 (2010). **교육사회학** (제4판). 파주: 교육과학사.

김영천 (2007). **질적연구방법론 1.** 서울: 문음사.

김왕준 (2010). 홍콩, 싱가포르, 핀란드, 아일랜드 교육개혁의 비전과 주요 정책. **초등교육연구, 23**(3), 321-340.

김희규 (2010). 수석교사의 역량 강화 방안. **한국교육교육학회 학술대회 자료집**, 49-75.

남진영, 탁병주 (2016). 대학입학 수학 시험 국제 비교 분석. **수학교육학연구, 26**(2), 287-307.

박경미 (2007). 한국 수학 수업의 조직 및 교수 활동 분석. **수학교육학연구, 17**(2), 127-145.

방정숙 (2004). 초등수학교실문화 개선: 사회수학적 규범과 수학적 관행. **수학교육학 연구, 14**(3), 283-304.

방정숙 (2006). 학생중심 초등수학 교실문화의 구형과 난제. **수학교육, 45**(4), 459-479.

서동엽 (2016). 우리나라와 싱가포르 중학교 수학 교육과정 비교. **수학교육학연구, 26**(3), 443-465.

서울시교육청 (2016). **2016학년도 중학교 학업성적 관리지침.** 서울시교육청

손민호 (2005). **학습의 사회이론**. 서울: 문음사.

신항균, 이광연, 황혜정, 윤혜영, 이지현 (2011). **중학교 수학 3.** 서울: 지학사.

양승윤 (2006, 11월). 싱가포르의 교육제도. **해외 대학교육 동향,** 82-89.

이윤미 (2012). 동아시아 모델의 교육적 적용 가능성 탐색. **교교육연구, 22**(5), 1-32.

이정선 (2002). **초등학교문화의 탐구**. 서율: 교육과학사.

이준열, 최부림, 김동재, 송영준, 윤상호, 황선미 외 1인 (2012). **중학교 수학 1.** 서울: 천재교육

장경윤, 강현영, 고호경, 권나영, 김구연, 김진호, 외 5인 (2016). **수학과 중등교육과정 국제 비교연구: 미국, 싱가포르, 영국, 일본, 호주.** 서울: 대한수학교육학회.

전평국 (1999). 초등학교 수학교실의 사회수학적 규범: 수학 지도에서의 개혁상의 문제에 대한 한국과 미국의 관점 비교. **초등수학교육, 3**(1), 1-36.

한국과학창의재단 (2011). **2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 연구.** (정책연구 2011-11)

한정화, 강순자, 정인철 (2005). 수학교실의 사회적 규범이 수학적 신념에 미치는 영향. **한국수학교육학회논문집, 8**(3), 343-356.

홍득표 (1997). 세계화를 위한 싱가포르의 교육정책. **국제정치논총, 36**(3), 605-628.

Adler, J. (1996). Lave and Wenger's social practive thoery and teaching and learning mathematics. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of 20th meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Valencia, Spain, Vol. 2, 3-10.

Alexander, R. (2000) *Culture and pedagogy: international comparisons in primary education.* Oxford: Blackwell

Bauersfeld, H. (1988). Interaction, Construction and Knowledge: Alternative Perspectives for Mathematics Education. In D. A. Grouws, T. J. Cooney & D. Jones (Eds.), *Effective Mathematics Teaching* (pp. 27-46). Reston, Virginia: NCTM & Lawrence Erlbaum.

Voigt, J. (1994). Negotiation of Mathematical Meaning and Learning Mathematics. E*ducational Studies in Mathematics, 26*, 275- 298.

Beaton, A., Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Gonzalez, E. J., Kelly, D. L., & Smith, T. A. (1996). *Mathematics Achievement in the Middle School Years: IEA''s Third International Mathematics and Science Study.* Chestnut Hill, MA: Boston College.

Bernstein, P. L. (1975). *Class, codes, and control: Towards as theory of educational transmissions* (vol. 3). Foutledge & Kegan Paul Ltd.

Biggs, J. B. (1994). What are effective schools? lessons from East and West (The Radford Memorial Lecture), *Australian Educational Research, 21*, 19-39.

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation: A culturual perspective on mathematics education.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism.* Engelwood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Bowers, J., Cobb, P., & McClain, K. (1999). The evolution of mathematical practice: A case study. *Cognition and Instruction, 17*(1), 25-64.

Brimer, A., & Griffin, P. (1985). *Mathematics achievement in Hong Kong secondary schools.* Center of Asian Studies, The University of Hong Kong, Hong Kong.

Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher, 34* 32-42.

Brown, R. (2007). Exploring the social positions that students construct within a classroom community of practice. *International Journal of Educational Research, 46,* 116-128.

Chen, J. (2007). Teacher's conceptions of excellent teaching in middle school in the north of China. *Asia Pacific Education Review, 8*(2), 288-297.

Chen, M.(2011). Divergent paths: the future of on-party rule in Singapore. *Harvard International Review, 32*(4), Retrieved September 9, 2017, from http://www.questia.com.

Clark, D. J., Mesiti, C., O'keefe, C., Xu, L. H., Jablonka, E., Mok, I. A. C. et al. (2007). Addressing the challenge of legitimate international comparison of classroom practice. *International Journal of Educational Research, 46,* 280-293.

Clark, D. Keitel, C., & Shimizu, Y. (Eds.). (2006). *Mathematic classrooms in twelve countries: The insiders' perspective.* Melbourne: Sense Publishers.

Clark, D., Emanuelsson, J., Jablonka, E., & Mok, I. A. C. (Eds.). (2006). *Making connections: Comparing mathematics classrooms around the world.* Melbourne: Sense Publishers.

Cobb, P. & Steffe, L. P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(2), 83-94.

Cobb, P. & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist, 3*1(3/4), 175-190.

Cobb, P. (1999). Individual and collective mathematical learning: The case of statistical data analysis. *Mathematical Thinking and Learning, 1,* 5-44.

Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E. (1993). Discourse, mathematical thinking and classroom practice. In E. A. Forman, N. Minkick, & C. A. Stone (Eds.), *Context for learning* (pp. 91-119). New York: Oxford University Press.

Cobb, P., & Yackel, E. (1995). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of development research. in D. T. Owens, M. K. Reed, & G. M. Millsaps (Eds.), *Proceedings of the 17th Annual Meeting of the North-American Capter of the International Croup for he Psychology of Mathematics Education* (pp. 3-29). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Darling-Hammond, L.(2010). *The flat world and education: how America's commitment to equity will determine our future.* New York: Teachers College Press.

Dawkins, P. C., & Weber, K. (2016). Values and norms of proof for mathematicians and students. *Educational Studies in Mathematics, 91,* 1-20.

Driver, R., Newton, P., & Osborns, J. (2000). Establishing the norms of scientific argumentation in classrooms. *Science Education, 84*(3), 287-312.

Ernest, P. (1989). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: A model. *Journal of Education for Teaching, 15*(1), 13-33.

Fernandez, C. & Yoshida, M. (2004). *Lesson Study: A Japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning.* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers

Foong, P. Y. (1993). Teachers' beliefs in a constructivist approach to teaching mathematics in Singapore primary school. *Proceedings of the Sixth South East Asia Conference on Mathematics Education (SEACME 6) and the Seventh National Conference on Mathematics* (pp. 433-442). Indonesia

Forman, E., & Ansell, E. (2001). The multiple voices of a mathematics classroom community. *Educational studies in*

Mathematics, 46, 115-142.
Fukawa-Connelly, T. (2012). Classroom sociomathematical norms for proof presentation in undergraduate in abstract algebra. The *Journal of Mathematical Behavior, 31,* 401-416.
Giddens, A. (2006). *Sociology* (5th ed.). alden: Polity Press.
Gill, M. G., & Boote, D. (2012). Classroom culture, mathematics culture, and the failures of reform: The need for a collective view of culture. *The College Record, 114,* Retrieved November 7, 2017, from https://eric.ed.gov/?id=EJ1002000
Gu, L. Huang, R., & Marton, F. (2004). Teaching with variation: An effective way of mathematics teaching in China. In L. Fan, N. Y. Wong, J. Cai, & S. Li (Eds.), *How Chinese learn mathematics: Perspecrive from insiders* (pp. 309-345). Singapore: World Scientific.
Herbst, P., & Balacheff, N. (2009). Proving and knowing in public: The nature of proof in a classroom. In D. Sylianou, M., Blanton, & E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades* (pp. 40-64). New York, NY: Routledge.
Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., Jacobs, J. et al. (2003). *Teaching Mathematics in Seven Countries: Results from the TIMSS 1999 Video Study.* Washington DC: National Center for Education Statistic.
Hiebert, J., Stigler, J. W. & Manaster, A. B. (1999). Mathematical features of lessons in the TIMSS Video Study. *ZDM, 31*(6), 196 - 201.
Ho, K. F., & Hedberg, J. G. (2005). Teachers'' pedagogies and their impact on students' mathematical problem solving. *Journal of Mathematical Behavior, 24,* 238-252.
Hoon, S. L., Kaur, B., & Kiam, L. H. (2006). Case studies of

Singapore secondary mathematics classrooms: The instructional approaches of two teachers. In D. J. Clark, C. Keitel, & Y. Shimizu (Eds.), *Mathematic classrooms in twelve countries: The insiders' perspective* (pp. 151-166). Melbourne: Sense Publishers.

Huang, R., & Leung, F. K. S. (2004). Cracking the paradox of the Chinese learners: Looking into the mathematics classrooms in Hong Kong and Shanghai. In L. Fan, N. Y. Wong, J. Cai, & S. Li (Eds.), *How Chinese learn mathematics: perspectives from insiders* (pp. 348-381). Singapore: World Scientific.

Hufferd-Ackles, K., Fuson, K. C., & Sherin, M. G. (2004). Describing levels and components of a math-talk learning community. *Journal for Research in Mathematics Education, 35,* 81-116.

Jarvis, P. (2009). Learning to be: from East and West. *Asia Pacific Education Review, 10*(2), 291-297.

Karur, B., Anthony, G., Ohtani, M., & Clarke, D. (Eds.) (2013). *Students voice in mathematics classrooms around the world.* Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Kaur B. (2009). Characteristics of good mathematics teaching in Singapore grade 8 classrooms: a juxtaposition of teachers' practice and students' perception. *ZDM, 41*, 333-347.

Kaur, B (2014, June). Evolution of Singapore''s school mathematics curriculum. *37th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia Incorporated (MERGA 2014) on ""Curriculum in Focus: Research Guided Practice""*, Sydney, Australia.

Kaur, B., Har, Y. B., & Kapur, M. (Eds.) (2009). *Mathematical Problem Solving.* Singapore: World Scientific.

Kaur, B., Kiam, L. H., & Hoon, S. L. (2006). Mathematics teaching in two singapore classrooms: The role of the textbook and homework. In D. J. Clark, C. Keitel, & Y. Shimizu (Eds.), *Mathematic classrooms in twelve countries: The insiders' perspective* (pp. 99-116). Melbourne: Sense Publishers.

Kwon, O. N. & Cho, S. J. (2012). Balance between foundations and creativity: Features of Korean mathematics education. *ZDM, 44,* 105-108.

Kwon, O. N., Ju, M. K., Rasmussen, C., Marrongelle, K., Park, J. H., Cho, K. H., et al. (2008). Utilization of revoicing based on learners' thinking in an inquiry-oriented differential equations class. *The SNU Journal of Education Research, 17,* 111-134.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation. Cambridge*, UK: Cambridge university press.

Lee, C. K-E. (2001). 교육의 우수성(Excellence) 지향: 싱가포르 사례 연구. **교육과학연구, 32**, 181-196

Lerman, S. (1998). Learning as social practice: An appreciative critique. In A. Watson (Ed.), *Situated cognition and the learning of mathematics* (pp. 33-42). Center for mathematics education research, University of Oxford Press.

Leung, F. K. S. (2001). In search of an East Asian identity in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 47,* 35-52.

Leung, F. K. S. (2005). Some characteristics of east asian mathematics classrooms based on data from the TIMSS 1999 video study. *Educational Studies in Mathematics, 60*(2), 199-215.

Leung, F. K. S. (2006). Mathematics education in East Asia and the West: Does culture matter? In F. K. S. Leung, K-D. Graf, & F.

J. Lopez-Real (Eds.), *Mathematics education in different cultural traditions: A comparative study of East Asia and the West* (pp. 21-46). New York: Springer.

Leung, F. K. S. (2011). The significance of IEA studies for education in East Asia. In C. Papanastasiou, T. Plomp, & E. Papanastasiou (Eds.), *IEA 1958-2008: 50 years of experiences and memories* (pp. 389-409). Nicosia: Cultural Center of the Kykkos Monaster.

Levenson, E., Tirosh, D., & Tsamir, P. (2009). Students perceived sociomathematical norms: The missing paradigm. *The Journal of Mathematical Behavior, 28,* 171-189.

Levine, J. M., & Moreland, R. L. (1991). Culture and socialization in work groups. In L. B. Resnick, J. M. Levine, & S. D. Teasley (Eds.), *Perspective on socially shared cognition* (pp. 257-279). Washington, DC: American Psychological Association.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers'' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

McClain, K. & Cobb, P. (2001). An analysis of development of sociomathematical norms in one first-grade classroom. *Journal for Researach in Mathematics Education, 32,* 236-266.

McCloskey, A. (2014). The promise of ritual: a lens for understanding persistent practices in mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics, 86*, 19-38.

McHoul, A. (1978). *Dialogicality and social representations: The dynamic of mind.* Cambridge University Press.

Mehan, H. (1979). *Learning lessons: Social organization in the classroom.* Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Miyakawa, T. (2017). Comparative analysis on the nature of proof to be taught in geometry: the case of French and Japanese lower secondary. *Educational Studies in Mathematics, 94,* 37-54.

Mogari, D. (2017). Using culturally relevant teaching in a co-educational mathematics class of a patriarchal community. *Educational Studies in Mathematics, 94,* 293-307.

Mok, K. & Tan, J. (2004). *Globalization and Marketization in Education: A Comparative Analysis of Hong Kong and Singapore*. Edwad Elgar Publishing.

Mok, K. (2003). Decentralization and marketization of education in Singapore: a case study of the school excellence model. *Journal of Educational Administration, 41*(4/5), 348-366.

Moore, R. Q.(2000). Multiracialism and meritocracy: Singapore's approach to race and inequality. *Review of Social Economy, 59*(3), 339-360.

Moschkovich, J. (2007). Examining mathematical discourse practices. *For the Learning of Mathematics, 27*(1), 24-30.

Park, K., & Leung, F. K. S. (2006). Mathematics lessons in Korea: Teaching with systematic variation. In D. J. Clark, C. Keitel, & Y. Shimizu (Eds.), *Mathematic classrooms in twelve countries: The insiders' perspective* (pp. 247-261). Melbourne: Sense Publishers.

Presmeg, N. (2007). The role of culture in teaching and learning mathematics. In F. Lester, Jr. (Ed.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning.* Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Quek, K. S., & Fan, L. (2009). Rethinking and researching mathematics assessment in Singapore: the quest for a new paradigm In, K. Wong, L. Yoong, Y. Peng, B. Kaur, P. Y.

Foong, & S. F. Ng (Eds.), *Mathematics Education: The Singapore Journey* (pp. 413-436). Singapore, SG World Scientific

Rasmussen, C., Wawro, M., & Zandieh, M. (2015). Examining individual and collective level mathematical progress. *Educational Studies in Mathematics, 88,* 259-281.

Rasmussen, C., Zandieh, M., & Wawro, M. (2009). How do you know which way the arrows go? The emergence and brokering of a classroom mathematics practice; In W.-M. Roth (Ed.), *Mathematical representations at the interface of the body and culture* (pp. 171-218). Charlotte: Information Age Publishing.

Sánchez, V., & García, M. (2014). Sociomathematical and mathematical norms related to definition in pre-service primary teachers' discourse. *Educational Studies in Mathematics, 85,* 305-320.

Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and on the danger of choosing just one. *Educational Researcher, 27,* 4-13.

Shimizu, Y., Kaur, B., Huang, T., & Clarke, D. (2011). *Mathematical tasks in classrooms around the world.* Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Singapore Ministry of Education (MOE). (2000). Preparing our young for the "new" economy. F Y 2000 Committee of supply debate. Singapore.

Singapore Ministry of Education (MOE). (2009). The desired outcomes of education. Retrived September 9, 2017, from https://www.moe.gov.sg/docs/default-source/document/education/files/desired-outcomes-of-education.pdf

Singapore Ministry of Education (MOE). (2012). *Mathematics syllabus (O-level).* Singapore: Curriculum Planning Division.

Singapore Ministry of Education (MOE). (2012). *O-& N(A)-Level mathematics teaching and learning syllabus.* Curriculum planning and development division.

Singapore Ministry of Education (MOE). (2015). Career information: Enhancing your strengths—areer tracks. Retrieved September, 9, 2017 from https://www.moe.gov.sg/careers/teach/careerinformation

Staples, M. E., Bartlo, J., & Thanheiser, E. (2012). Justification as teaching an learning practices: Its (potential) multifacted role in middle grades mathematics classrooms. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(4), 447-462.

Stigler, J. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom.* New York, NY: The Free Press.

Stigler, J. W., Gonzales, P., Kawanaka, T., Knoll, S., & Serrano, A. (1999). *The TIMSS Videotape Classroom Study: Methods and Findings from an Exploratory Research Project on Eighth-Grade Mathematics Instruction in Germany, Japan, and the United States* (NCES 1999-074). Washington, DC: National Center for Education Statistics.

Taylor, P. C. (1996). Mythmaking and mythbreaking in the mathematics classroom. *Educational studies in Mathematics, 31*(1-2), 151-173.

Terry, D. J. & Hogg, M. A. (1996). Group norms and the attitude-behavior relationship: A role for group identification. *Personality and Social Psychology. Bulletin, 22*(8), 776-793.

Thomas, R. M. (1996). Cultural and religious concepts of human development. In E. De Corte, & F. E. Weinert (Eds.), *International encyclopedia of developmental and instructional psychology* (pp. 77-81). Oxford, UK: Pergamon Press.

Tsay, J-J., Judd, A. B., Hauk, S., & Davis, M. (2011). Case study of a college mathematics instructors: patterns of classroom discourse. *Educational Studies in Mathematics, 78,* 205-229.

Valentine, D. & Speece, M.(2002). Experiential learning methods in Asian cultures: a Singapore case study(focus on intercultural communication). *Business Communication Quarterly, 65*(3), 106-116.

Voigt (1985). Patterns and rountines in classroom interaction. *Researches en Didactique des Mathématiques, 6*(1), 69-118.

Weber, K., Inglish, M., & Mejia-Romos, J. P. (2014). How mathematics obtain conviction: Implications for mathematics instruction and research on epistemic cognition. *Educational Psychologist,* 36-58.

Wenger, E. (1998). *Community of practice: Learning, meaning, and identity.* Cambridge, UK: Cambridge university press.

Wenger, E., MeDermott, R., & Synder, W. M. (2002) *Cultivating communities of practice.* Boston, MASS, Harvard Business School Press

Wong, K. M. & Cheung, W. W. (1997), A survey of the current state of primary mathematics teaching in Hong Kong. *EduMath, 4,* 3-15.

Wong, N. Y. (1998). In search of the CHC learner: Smarter, works harder or something more?, Plenary lecture, In H. S. Park, Y. H. Choe, H. Shin & S. H. (Eds.), *Procedding of the ICME-East Asia Regional Conference on Mathematicl Education, 1*, 85-98.

Wong, S. O., & Lim-Teo, S. K. (2002). Effects of heuristics instruction on pupils' mathematical problem-solving process. In D. Edge & B. H. Yep (Eds.) *Proceedings of Second East Asia*

Regional Conference on Mathematics Education & Ninth Southeast Asian Conference on Mathematics Education (pp. 180-186). Singapore: Association of Mathematics Educators.
Wood, T. (1994). Patterns of interaction and the culture of mathematics classroom. In S. Lerman (Ed.), *Cultural perspective on the mathematics classroom* (pp. 149-168). Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.
Wood, T., Williams, G., & McNeal, B. (2006). Children's mathematical thinking in different classroom culture. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(3), 222-255.
Yackel, E. (2004). 수학교실에서 설명, 정당화와 논증 분석을 위한 이론적 관점 (주미경 역.) **한국수학교육학회, 43**(1), 97-107.
Yackel, E., Gravemeijer, K., & Sfard, A. (Eds.). (2011). *A Journey in mathematics education research: Insights from the work of Paul Cobb.* New York: Springer.
Yao, X. (2000). *An introduction to Confucianism. Cambridge*, UK: Cambridge University Press.
Yeo, J., Seng, T. K., Yee, L. C., Chow, I., Hong, O. C. & Phua, J. (2015). *New syllabus mathematics normal (academic) 3.* Singapore: Shinglee Publisher
Yeo, J., Seng, T. K., Yee, L. C., Chow, I., Meng N. C., Liew, J. et al. (2015). *New syllabus mathematics 2* (7th ed.). Singapore: Shinglee Publisher
Yep, B. H. (2016, 12월). **싱가포르 수학교실.** 국제 수학교실 포럼. 서울, 한국
Yoshinori, S., Kaur, B., Huang, R. & Clarke, D. (Eds.). (2010). *Mathematical tasks in classroom around the world.* Rotterdam: Sense Publishers
Young, M. F. D. (1970). *An approach to the study of curricular as*

socially organized knowledge. In Knowledge and Control. Collier Macmillan.

Yun, S. M. & Kim, H-B. (2015). Changes in Students' participation and small group norms in scientific argumentation. *Research in Science Education, 45*(3), 465-484.

Zemelman, S., Daniels, H., & Hyde, A. (1998). *Best practice: New standards for teaching in America''s schools* (2nd ed.). Portsmouth, NH: Heinemann.

부록 1: 한국과 싱가포르 교육과정 대수와 기하를 중심으로

부록 1-1 2009 교육과정과 2015 교육과정 내용 영역 비교 표: 대수와 기하를 중심으로

2009개정 수학과 교육과정과 2015개정 수학과 교육과정 내용요소 비교: 문자와 식을 중심으로

영역		2009 개정 교육과정		변경여부	2015 개정 교육과정	
		내용요소	성취기준		내용요소	성취 기준
문자와식	중1	문자의사용과식의계산	다양한 상황을 문자를 사용한 식으로 간단히 나타낼 수 있다.	유지	문자의사용과식의계산	다양한 상황을 문자를 사용한 식으로 간단히 나타낼 수 있다.
			식의 값을 구할 수 있다.	유지		식의 값을 구할 수 있다.
			일차식의 덧셈과 뺄셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.	유지		일차식의 덧셈과 뺄셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.
		일차방정식	다양한 상황을 이용하여 일차방정식과 그 해의 의미를 이해한다.	유지	일차방정식	방정식과 그 해의 의미를 알고, 등식의 성질을 이해한다.
			등식의 성질을 이해하고 일차방정식을 풀 수 있다.	유지		일차방정식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결 할 수 있다.
			일차방정식을 활용하여 다양한 실생활 문제를 해결할 수 있다.	축소		
문자와식	중2	식의계산	이차식의 덧셈과 뺄셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.	유지	식의계산	지수법칙을 이해한다.
			지수법칙을 이해한다.	유지		
			다항식의 곱셈의 원리를 이해하고, 곱셈 공식을 유도할 수 있다.	축소		다항식의 덧셈과 뺄셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.
			다항식의 나눗셈의 원리를 이	축소		‘(단항식)×(단항식)’. ‘(다항식)

			해하고, 그 계산을 할 수 있다.			÷(단항식)'과 같은 곱셈과 나눗셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.
			간단한 등식을 변형할 수 있다.			
		미지수가 2개인 연립일차방정식	미지수가 2개인 일차방정식과 그 해의 의미를 이해한다.	삭제		
			미지수가 2개인 연립일차방정시과 그 해의 의미를 이해하고, 이를 풀 수 있다.	삭제		
			미지수가 2개인 연립일차방정식을 활용하여 다양한 실생활 문제를 해결 할 수 있다.	삭제		
		일차부등식과 연립일차부등식	다양한 상황을 이용하여 일차부등식과 그 해의 의미를 이해한다.	유지	일차부등식과 연립일차방정식	부등식과 그 해의 의미를 알고, 부등식의 성질을 이해한다.
			부등식의 기본 성질을 이용하여 일차부등식을 풀 수 있다.	유지		
			연립일차부등식과 그 해의 의미를 이해하고, 이를 풀 수 있다.	유지		일차부등식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
			일차부등식 또는 연립일차부등식을 활용하여 다양한 실생활 문제를 해결할 수 있다.	축소		미지수가 2개인 연립일차방정식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
문자와식	중3	다항식의 인수분해	인수분해의 뜻을 알고, 인수분해를 할 수 있다.	변형	다항식의 곱셈과 인수분해	다항식의 곱셈과 인수분해를 할 수 있다.
		이차방정식	이차방정식과 그 해의 의미를 이해하고, 이를 풀 수 있다.	축소	이차방정식	이차방정식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결 할 수 있다.
			이차방정식을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.	축소		

2009개정 수학과 교육과정과 2015개정 수학과 교육과정 내용요소 비교: 기하를 중심으로

<table>
<tr><td rowspan="2" colspan="2">영역
(2015 기준)</td><td colspan="2">2009 개정 교육과정</td><td rowspan="2">변경여부</td><td colspan="2">2015 개정 교육과정</td></tr>
<tr><td>내용요소</td><td>성취기준</td><td>내용요소</td><td>성취 기준</td></tr>
<tr><td rowspan="11">기하</td><td rowspan="11">중1</td><td rowspan="2">기본도형</td><td>점, 선, 면, 각을 이해하고, 점, 직선, 평면의 위치 관계를 설명할 수 있다.</td><td>유지</td><td rowspan="2">기본도형</td><td>점, 선, 면, 각을 이해하고, 점, 직선, 평면의 위치 관계를 설명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>평행선에서 동위각과 엇각의 성질을 이해한다.</td><td>유지</td><td>평행선에서 동위각과 엇각의 성질을 이해한다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">작도와합동</td><td>삼각형을 작도 할 수 있다</td><td>유지</td><td rowspan="2">작도와합동</td><td>삼각형을 작도 할 수 있다</td></tr>
<tr><td>삼각형의 합동 조건을 이해하고, 이를 이용하여 두 삼각형이 합동인지 판별할 수 있다.</td><td>유지</td><td>삼각형의 합동 조건을 이해하고, 이를 이용하여 두 삼각형이 합동인지 판별할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">평면도형의성질</td><td>다각형의 성질을 이해한다.</td><td>유지</td><td rowspan="2">평면도형의성질</td><td>다각형의 성질을 이해한다.</td></tr>
<tr><td>부채꼴의 중심각과 호의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 부채꼴의 넓이와 호의 길이를 구할 수 있다.</td><td>유지</td><td>부채꼴의 중심각과 호의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 부채꼴의 넓이와 호의 길이를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">입체도형의성질</td><td>다면체의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.</td><td>변형</td><td rowspan="3">입체도형의성질</td><td>다면체의 성질을 이해한다.</td></tr>
<tr><td>회전체의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.</td><td>변형</td><td>회전체의 성질을 이해한다.</td></tr>
<tr><td>입체도형의 겉넓이와 부피를 구할 수 있다.</td><td>유지</td><td>입체도형의 겉넓이와 부피를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">삼각형과사각형의</td><td>이등변삼각형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다.</td><td>유지</td><td rowspan="3">삼각형과사각형의</td><td>이등변삼각형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>삼각형의 외심과 내심의 성질을 이해하고 설명할 수 있다.</td><td>유지</td><td>삼각형의 외심과 내심의 성질을 이해하고 설명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>사각형의 성질을 이해하고</td><td>유지</td><td>사각형의 성질을 이해하고 설</td></tr>
</table>

		성질	설명 할 수 있다.		성질	명 할 수 있다.
		도형의 닮음	도형의 닮음의 뜻을 안다.	변형	도형의 닮음	도형의 닮음의 의미와 닮은 도형의 성질을 이해한다.
			닮은 도형의 성질을 이해한다.	변형		
			삼각형의 닮음조건을 이해하고, 이를 이용하여 두 삼각형의 닮음인지 판별할 수 있다.	유지		삼각형의 닮음 조건을 이해하고, 이를 이용하여 두 삼각형이 닮음 인지 판별할 수 있다.
		닮음의 활용	평행선 사이의 선분의 길이의 비를 구할 수 있다.	유지		평행선 사이의 선분의 길이의 비를 구할 수 있다.
			닮은 도형의 성질을 활용하여 여러 가지 문제를 해결 할 수 있다.	변경		
		피타고라스 정리	피타고라스 정리를 이해하고 설명할 수 있다. (중3에서 이동)	유지	피타고라스 정리	피타고라스 정리를 이해하고 설명할 수 있다.
			피타고라스 정리를 활용하여 여러 가지 문제를 해결 할 수 있다.	삭제		
기하	중3	피타고라스 정리	피타고라스 정리를 이해하고 설명할 수 있다. (중2로 이동)	변경		
			피타고라스 정리를 활용하여 여러 가지 문제를 해결 할 수 있다.	삭제		
		삼각비	삼각비의 뜻을 알고, 간단한 삼각비의 값을 구할 수 있다.	유지	삼각비	삼각비의 뜻을 알고, 간단한 삼각비의 값을 구할 수 있다.
			삼각비를 활용하여 다양한 실생활 문제를 해결 할 수 있다.	변경		삼각비를 활용하여 여러 가지 문제를 해결 할 수 있다.
		원의 성질	원의 현에 관한 성질과 접선에 관한 성질을 이해한다.	유지	원의 성질	원의 현에 관한 성질과 접선에 관한 성질을 이해한다.
			원주각의 성질을 이해하고, 이를 활용하여 여러 가지 문제를 해결 할 수 있다.	변경		원주각의 성질을 이해한다.

부록 1-2 한국과 싱가포르 교육과정 내용 영역 비교 표: 대수와 기하를 중심으로

2015개정 수학과 교육과정과 싱가포르 수학과 교육과정(2011년 개정) 비교: 문자와 식을 중심으로

<table>
<tr><th colspan="3">2015 개정 교육과정</th><th colspan="3">싱가포르 교육과정(2011년 개정)</th></tr>
<tr><th>학년</th><th>내용요소</th><th>성취 기준</th><th>내용</th><th>주제</th><th>학년</th></tr>
<tr><td rowspan="6">1</td><td rowspan="3">문자의 사용과 식의 계산</td><td>문자를 사용한 식</td><td>5.1. 수를 표현하기 위해 문자 사용하기</td><td rowspan="6">대수적 표현과 식</td><td rowspan="6">1</td></tr>
<tr><td>식의 값</td><td>5.2. 표기법의 이해하기
$a\times b$를 ab로,
$a\div b$ 또는 $a\times\frac{1}{b}$를 $\frac{a}{b}$로,
$a\times a$를 a^2로,
$a\times a\times a$를 a^3로,
$a\times a\times b$를 a^2b로,
$y+y+y$ 또는 $3\times y$를 $3y$로,
$3\times(x+y)$를 $3(x+y)$로,
$(3+y)\div 5$ 또는 $\frac{1}{5}\times(3+y)$를
$\frac{3+y}{5}$로 이해하기
5.3. 대수적 표현과 식 값</td></tr>
<tr><td>일차식의 덧셈과 뺄셈</td><td>5.6. 일차식의 덧셈과 뺄셈</td></tr>
<tr><td rowspan="2">일차방정식</td><td>방정식과 그 해. 등식의 성질</td><td rowspan="2">5.4. 간단한 실생활 상황을 대수적 표현으로 변환하기
5.5. n차 항의 대수적 식에서 찾아진 패턴/관계 인식하고 표현하기</td></tr>
<tr><td>일차방정식을 활용하여 문제를 해결</td></tr>
<tr><td></td><td><중2></td><td>5.7. $-2(3x-5)+4x$,
$\frac{2x}{3}-\frac{3(x-5)}{2}$와 같은
일차식을 간단히 하기
5.8. 괄호를 사용하고, 공통인수를 빼기</td></tr>
</table>

		<중2>	7.1. 등식과 부등식의 개념 7.2. 1변수 일차방정식의 해결 7.3. 간단한 부등식 문제 해결 $ax \le b$, $ax \ge b$, $ax < b$ 그리고 $ax > b$ (단, a, b는 정수) 7.4. 일차방정식으로 환원 되는 분수방정식의 해결 $\frac{x}{3}+\frac{x-2}{4}=3$, $\frac{3}{x-2}=6$ 7.5. 문제해결을 위한 1변수 일차방정식 만들기	방정식과부등식	
2	식의계산	지수법칙			2
		다항식의 덧셈과 뺄셈	5.9. 대수식의 곱과 전개 5.10. 등식의 변형	대수적표현과식	
		'(단항식)×(단항식)'. '(다항식)÷(단항식)'과 같은 곱셈과 나눗셈	5.12. 다음 식을 이용하기 $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$, $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 5.15. 간단한 분수식의 곱셈과 나눗셈 예) $\left(\frac{3a}{4b^2}\right)\left(\frac{5ab}{3}\right)$, $\frac{3a}{4} \div \frac{9a^2}{10}$		
	일차부등식과연립일차방정식	부등식과 그 해의 의미, 부등식의 성질	<중등1 방정식과 부등식>		
		일차부등식 해결	<중등1 방정식과 부등식>		
		미지수가 2개인 연립일차방정식 해결	5.11. 주어진 방정식에서 미지수의 값 찾기 <중등3>		
		<중3>	5.13. $ax+bx+kay+by$과 같은 일차식의 인수분해 하기 5.14. ax^2+bx+c과 같은		

			이차식을 인수분해 하기		
			5.16. $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x-3}, \frac{1}{x^2-9}+\frac{2}{x-3}, \frac{1}{x-3}+\frac{2}{(x-3)^2}$ 와 같은 분수식의 덧셈과 뺄셈		
		<고1>	7.6. 변수가 두 개인 일차 방정식의 그래프 $(ax+by=c)$	방정식과부등식	
		<중2>	7.7. 미지수가 두 개인 연립 일차방정식: 대입법과 소거법, 그래프 방법 7.9. 문제해결을 위해 미지수가 두 개인 연립일차 방정식 만들기		
3	다항식의곱셈과인수분해	다항식의 곱셈과 인수분해	<중등2>	방정식과부등식	3
		이차방정식	7.8. 인수분해로 1변수 이차방정식의 해결 7.10. 1변수 이차방정식 해결: 식의 사용, $y=x^2+px+q$에서 제곱식을 이용하기, 그래프 방법 7.13. 문제해결을 위해 1변수 이차방정식 만들기		
			7.11. 이차방정식으로 환원되는 분수방정식 해결 예) $\frac{6}{x+4}=x+3$, $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x-3}=5$		
		<중2>	7.12. 1변수 일차 부등식 해결하고, 수직선에 해 표현하기		

2015 개정 교육과정			싱가포르 교육과정		
학년	내용요소	성취 기준	내용	주제	학년
중1	기본도형	<초3, 초4>	1.1. 직각, 예각, 둔각, 반사각	각, 삼각형 그리고 다각형	1
		점, 선, 면, 각의 이해. 점, 직선, 평면의 위치 관계	1.2. 맞꼭지각, 수직선에서의 각(angles on a straight line), 한 점에서의 각(angles at a point)		
		평행선에서 동위각과 엇각의 성질	1.3. 동위각, 엇각, 내각		
	작도와 합동	삼각형을 작도	1.4. 삼각형의 성질, 대칭의 성질이 포함된 특별한 사각형과 다각형(오각형, 육각형, 팔각형, 십각형)		
		삼각형의 합동 조건과 판별	<중등2, 중등3>		
	평면도형의 성질	다각형의 성질	1.4. 삼각형의 성질, 대칭의 성질이 포함된 특별한 사각형과 다각형(오각형, 육각형, 팔각형, 십각형) 1.5. 성질에 따라 사각형 분류하기 1.6. 복록다각형의 내각의 합과 외각의 합 1.7. 선분의 수직이등분선의 성질과 각의 이등분선의 성질 1.8. 자, 컴퍼스, 삼각자, 각도기를 이용하여 주어진 조건(선분의 수직이등분선과 각의 이등분선이 포함)에 맞는 도형을 작도하기		
		부채꼴의 중심각과 호의 관계 부채꼴의 넓이와 호의 길이			
	입체도형의 성질	다면체의 성질			
		회전체의 성질			
		입체도형의 겉넓이와 부피	5.5. 입체도형의 겉넓이와 부피	측정	
		<초5>	5.1. 평행사변형과 사다리꼴의 넓이		
		<초5>	5.2. 평면도형의 둘레 및 면적		
		<초6>	5.3. 삼각기둥과 원기둥의 넓이와 부피		
		<초5, 초6>	5.4. 단위 변환 (cm^2 와 m^2, cm^3 와 m^3)		

			8.1. 기하를 이용한 실생활 맥락 문제해결 8.2. 문제의 맥락에서 해법을 설명하기 8.3. 해법의 한계와 가정을 확인하기	실생활맥락에서문제해결	
중2	삼각형과사각형의성질	이등변삼각형의 성질			2
		삼각형의 외심과 내심의 성질			
		사각형의 성질			
			2.1. 도형의 합동	합동과닮음	
	도형의닮음	도형의 닮음	2.2. 도형의 닮음 2.4. 평면도형의 확대와 축소 2.5. 비례척도 2.6. 합동과 닮음을 이용한 문제해결		
		삼각형의 닮음 조건과 판별	2.3. 닮은 삼각형과 다각형의 성질: 대응하는 각이 같음, 대응하는 변의 비가 같음 <중등3>		
		평행선 사이의 선분의 길이 비			
	피타고라스정리	피타고라스 정리	4.1. 피타고라스 정리의 사용 4.2. 세변이 주어진 삼각형이 직각 삼각형인지 판별하기	피타고라스정리와삼각비	
		<중3>	4.3 직각삼각형에서 변의 길이와 각의 크기를 구하기 위해 (예각의)삼각비의 사용 (sine, cosine, 그리고 tangent)		
		<중1>	5.6. 사각뿔, 원뿔, 구의 겉넓이와 부피	측정	

<table>
<tr><td rowspan="7">중3</td><td rowspan="3"></td><td><중1. 중2></td><td>2.7. 두 삼각형의 합동과 닮음 판별하기</td><td rowspan="3">합동과닮음</td><td rowspan="10">3~4</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>2.8. 닮은 평면도형의 넓이 비</td></tr>
<tr><td>2.9. 닮은 입체도형의 부피 비</td></tr>
<tr><td rowspan="2">삼각비</td><td>삼각비의 뜻, 삼각비의 값</td><td><중등2></td><td></td></tr>
<tr><td>삼각비를 활용한 문제해결</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">원의성질</td><td>원의 현에 관한 성질과 접선에 관한 성질</td><td>3.1. 원의 대칭 성질: 현의 성질, 접선의 성질</td><td rowspan="2">원의성질</td></tr>
<tr><td>원주각의 성질</td><td>3.2. 원의 각의 성질: 원주각의 성질</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>6.1. 평면 위 두 점을 지나는 직선의 기울기
6.2. 주어진 두 점 사이의 거리
6.3. 직선의 그래프를 $y=mx+c$ 형태로 찾고 이해하기
6.4. 좌표를 이용한 기하문제</td><td>평면기하</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>7.1. 표기법의 사용:
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{a}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ 그리고 $|\boldsymbol{a}|$
7.2. 방향이 있는 선분으로서 벡터 표현
7.3. 벡터 변환
7.4. 위치 벡터
7.5. 벡터의 크기
7.6. 벡터의 합과 차
7.7. 벡터의 스칼라 곱
7.8. 벡터를 이용한 평면기하 문제</td><td>평면벡터</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>8.1. 기하를 이용한 실생활 문제
8.2. 문제의 맥락에서 해법 이해하기
8.3. 해법의 한계와 가정을 확인하기</td><td>실생활맥락에서문제해결</td></tr>
</table>

부록 2: 수업 차시별 에피소드

부록 2-1 한국 수석교사의 교실의 수업 차시별 에피소드

1차시	인수분해의 역사 그리고 인수분해를 학습하기 위해 필요한 용어 학습
에피소드	1. 학급정렬
	2. 이전 차시 학습한 무리수 내용 정리 및 π의 소수점 1000자리까지 외우기
	3. 인수분해를 위한 수학 용어알기: 다항식, 전개, 분배법칙, 곱셈공식, 인수, 공통인수, 완전 제곱식, 인수분해
	4. 학습한 용어가 답이 되게 질문 만들기
	5. 영상자료를 보고 학습주제와 관련된 문제 만들기
	6. 에피소드 5에서 학생들이 만든 문제 해결
	7. 다음 차시 안내
2차시	공통인수로 인수분해 하기
에피소드	1. 지난 수업에서 π의 소수표현을 외운 학생 칭찬하기
	2. 인수분해와 관련된 수학 용어를 활용한 빙고 게임하기
	3. 수학용어 이해하기: 전개, 인수분해, 공통인수
	4. 넓이를 이용하여 공통인수 활용한 인수분해 원리 이해하기
	5. 공통인수로 인수분해 하기(예제)
	6. (활동지) 인수분해와 전개의 의미정리하기
	7. (활동지) 공통인수 용어 정리 및 예제풀이
	8. 짝과 함께한 풀이(활동지)를 전체 학생들과 함께 확인하기(실물 화상기)
	9. 부호를 고려한 공통인수 문제와 공통인수가 다항식인 문제 해결하기
	10. 골든벨 형식으로 공통인수로 인수분해 하는 문제 해결
3차시	완전제곱식으로 인수분해 하기_기초
에피소드	1. 학급 정렬
	2. $ma+mb$꼴의 인수분해(전 차시 내용) 정리하기
	3. 숙제(공통인수로 인수분해 하기)를 짝과 함께 확인하기
	4. 짝과 함께 확인한 풀이를 짝과 함께 칠판에 기록하기
	5. 학생들의 풀이를 비교하며 교사가 평가하기(치환의 아이디어)
	6. 완전제곱식으로 인수분해하는 원리를 그림으로 설명하기
	7. 완전제곱식으로 인수분해 하기 예제 문제 해결하기
	8. (활동지) 짝과 함께 인수분해 문제 해결하기
	9. 짝과 함께한 풀이(활동지)를 전체 학생들과 함께 확인하기(실물 화상기)
4차시	완전제곱식으로 인수분해 하기_심화
에피소드	1. 학급정렬
	2. 완전제곱식으로 인수분해 하는 공식 정리하기
	3. 완전제곱식으로 인수분해 되는 예와 되지 않는 예를 짝과 논의하기
	4. 학생의 발표를 다시 설명하고, 새로운 문제제기하기
	5. $x^2+2ax+\square$ 가 완전제곱식이 되게 하는 수 찾기(활동지)

	6. 모둠으로 완전제곱식으로 인수분해하기 문제 해결하기(활동지)
	7. 교사가 모둠과제를 해결하기
	8. 활동지에 잘못된 문제 수정
	9. 활동지의 문제를 개별적으로 해결하기
	10. 학생이 도전문제를 칠판에 풀고, 교사는 두 풀이의 차이를 설명하기
	11. 모둠별로 문제를 만들고 그 문제를 해결하기
5차시	합차 공식을 이용하여 인수분해 하기
에피소드	1. 학급정렬
	2. 공통인수 및 완전제곱식으로 인수분해하기 정리
	3. $(x-3)(x+3)$의 전개와 x^2-9의 인수분해 연결하기
	4. 합차공식을 이용한 인수분해의 원리를 그림으로 설명하기
	5. 합차 공식을 적용한 예제문제 해결하기
	6. 합차 공식을 적용하는데 학생들이 하기 쉬운 실수 설명하기
	7. 활용 문제(104^2-9^2 계산하기) 해결하기
	8. 유제문제 해결하기
	9. 문제 만들기 활동 안내하기
	10. 교사와 함께 간단한 합차 공식을 이용한 인수분해 해결하기(실물화상기)
	11. 개별적으로 합차 공식을 이용한 인수분해 해결하기(활동지)
	12. 학생이 푼 문제를 전체 학생들과 함께 확인하기(실물화상기)
	13. 학생이 칠판에서 인수분해 문제 풀기
	14. 학생의 풀이를 교사가 설명하기
	15. 학생이 푼 문제를 전체 학생들과 함께 확인하기(실물화상기)
	16. 학생이 인수분해 문제를 칠판에 해결하고 설명하기
	17. 학생의 발표를 교사가 보충 설명하기
	18. 인수분해 문제를 학생이 해결하면서 설명하기(실물화상기)
	19. 학생의 발표에 대해 교사가 보충 설명하기
6차시	$x^2+(a+b)x+ab$꼴의 다항식 인수분해 하기
에피소드	1. 학급정렬
	2. 전 차시 학습내용 정리
	3. 활동지 문제를 짝과 함께 해결하기
	4. 유제 문제를 선생님 중심으로 해결하기
	5. 인수분해 공식의 원리를 그림을 이용해서 설명하기
	6. 인수분해 공식을 익히기 위해 연습하기
	7. 활동지 문제를 교사 중심으로 해결하기
	8. 개별적으로 인수분해 하기(활동지)
	9. 짝별로 답을 확인하기
	10. 학생이 활동지 문제를 칠판에 해결하기
	11. 학생의 발표를 교사가 보충 설명하기
	12. 숙제 안내하기
7차시	$acx^2+(ad+bc)x+bd$꼴의 다항식 인수분해 하기
에피	1. 상품으로 학생들 활동 독려하기
	2. 전 차시 학습내용 정리

<table>
<tr><td rowspan="12">소드</td><td>3. 모둠과제 문제 모둠으로 해결하기(활동지)</td></tr>
<tr><td>4. 학생들이 활동지 문제를 칠판에 해결하고 발표하기</td></tr>
<tr><td>5. 학습주제 설명하고 인수분해 하는 절차 설명하기</td></tr>
<tr><td>6. 활동지 문제를 설명하기</td></tr>
<tr><td>7. 모둠별로 문제를 해결하기 위한 아디이어 모으기</td></tr>
<tr><td>8. 학생들이 칠판에 문제해결하기</td></tr>
<tr><td>9. 선생님이 학생의 풀이를 보고 설명하기</td></tr>
<tr><td>10. 인수분해 방법 정리하기</td></tr>
<tr><td>11. 인수분해 문제를 해결하는 개별학습하기</td></tr>
<tr><td>12. 학생이 푼 문제를 전체 학생들과 함께 확인하기(실물화상기)</td></tr>
<tr><td>13. 인수분해 문제를 해결하는 개별학습하기</td></tr>
<tr><td>14. 완전제곱식으로 풀 수 있는 인수분해 문제 정리하기</td></tr>
<tr><td>8차시</td><td>수준별 다양한 인수분해 문제 해결 I</td></tr>
<tr><td rowspan="10">에피
소드</td><td>1. 수업 활동 안내하기</td></tr>
<tr><td>2. 모둠별로 인수분해 방법 정리하기</td></tr>
<tr><td>3. 각 조의 6번은 칠판에 나와 주어진 문제를 해결하고, 교사는 풀이를 비교해 주기: $(x+y)a+(x+y)b$를 인수분해 하여라.</td></tr>
<tr><td>4. 각 조의 5번은 칠판에 나와 주어진 문제를 해결하고, 교사는 풀이를 비교해 주기: x^2+6x+5를 인수분해 하여라.</td></tr>
<tr><td>5. 각 조의 4번은 칠판에 나와 주어진 문제를 해결하고, 교사는 풀이를 설명하기: $9x^2-4$, $6x^2-7x+2$의 공통인수를 찾아라.</td></tr>
<tr><td>6. 각 조의 3번은 칠판에 나와 주어진 문제를 해결하고 교사는 풀이를 설명하기: $4x^2+(k-1)y+9y^2$가 완전제곱식으로 인수분해 될 때, k의 값을 구하여라.</td></tr>
<tr><td>7. 각 조의 2번은 칠판에 나와 하기 주어진 문제를 해결하기:
$(x-3)^2-4(x-3)+12$를 인수분해 하여라.</td></tr>
<tr><td>8. 각 조의 1번은 칠판에 나와 주어진 문제를 해결하기:
$(x+4)^2=x^2+ax+16$, $(y+b)^2=y^2-20y+100$일 때, $a+b$의 최댓값을 구하여라.</td></tr>
<tr><td>9. 각 조의 3번은 칠판에 나와 주어진 문제 해결하기:
$6^2-5^2+4^2-3^2+2^2-1^2$을 계산하여라.</td></tr>
<tr><td>10. 개별적으로 인수분해 활용 문제 해결하기</td></tr>
<tr><td>9차시</td><td>수준별 다양한 인수분해 문제 해결 II</td></tr>
<tr><td rowspan="4">에피
소드</td><td>1. 인수분해 단원 전체 내용 정리</td></tr>
<tr><td>2. 수준별 문제 해결, 서로 주어진 문제를 설명하면서 해결하기</td></tr>
<tr><td>3. 각 조의 6번은 선택한 문제를 해결하고 교사는 풀이를 설명하기:
$x^2+12x+36$ 를 인수분해 하여라.</td></tr>
<tr><td>4. 각 조의 3번은 선택한 문제를 해결하고 교사는 풀이를 설명하기:</td></tr>
</table>

	$x=\sqrt{5}+\sqrt{2}$, $y=\sqrt{5}-\sqrt{2}$ 일 때, x^2y+xy^2를 구하여라.
	5. 각 조의 2번은 선택한 문제를 해결하고 교사는 풀이를 설명하기: $6^2-5^2+4^2-3^2+2^2-1^2$를 구하여라.
	6. 모둠별로 문제 해결하기
	7. 모둠 문제를 모둠원에게 일일이 물어 모둠원이 모두 이해했는지 확인하기
	8. 수준별로 주어진 문제 해결하기(비행기 날리기 활동)
	9. 친구들의 답을 채점해 주기(비행기 날리기 활동)
	10. 수업 마무리하기

부록 2-2 싱가포르 리드 교사의 교실의 수업 차시별 에피소드

1차시	두 삼각형이 합동인지 아닌지 판별하기
에피소드	1. 삼각형의 합동조건 정리하기
	2. SAS조건을 사용하여, 두 삼각형이 합동임을 보이기, 조건을 어떻게 쓸 것인지 보여주기
	3. 개별학습하기 그리고 교사에 의해 선택된 두 학생이 칠판에 합동조건을 사용하는 문제를 해결하기
	4. 학생의 풀이를 교사가 설명하기
	5. 합동조건과 닮은 조건을 비교하기
2차시	두 삼각형이 닮음인지 아닌지 판별하기
에피소드	1. RHS 닮음 조건이 없는 이유를 설명하기
	2. AA 닮음 조건을 사용한 증명을 작성하기
	3. 개별학습하기 그리고 교사에 의해 선택된 학생이 칠판에 SSS 닮음조건을 활용하여 증명하기
	4. 학생의 증명에 대해 교사가 설명하기
	5. 개별학습하기 그리고 교사에 의해 선택된 학생이 칠판에 SAS 닮음조건을 활용하여 증명하기
	6. 학생이 자신의 증명을 교사의 질문에 답하면서 설명하기
	7. 닮음이 아닌 삼각형을 탐구하기
	8. 각의 이해: 엇각, 동위각, 맞꼭지각, 내각
	9. Z모양의 도형에서 AA닮음인 두 삼각형 찾기
	10. A모양의 도형에서 AA닮음인 두 삼각형 찾기
	11. 도형에서 닮음인 두 삼각형 찾기 I
	12. 도형에서 닮음인 두 삼각형 찾기 II
3차시	도형에서 닮음인 삼각형 찾기 그리고 닮음을 이용한 문제해결하기
에피소드	1. 개별학습으로 도형에서 닮음인 두 삼각형 찾기
	2. 선생님이 도형에서 닮음인 삼각형을 찾고 닮음임을 증명하기
	3. 닮음을 이용하여 도형의 각의 크기 구하기
	4. 닮음을 이용하여 도형의 변의 길이 구하기
	5. 개별학습하기 그리고 교사에 의해 선택된 학생이 칠판에 문제해결하기
	6. 학생의 풀이를 바탕으로 증명을 설명하기 그리고 교사의 증명전략을 설명하기
	7. 과제 제시하기
4차시	닮음 평면도형과 입체도형의 넓이 비와 부피 비 탐구하기
에피소드	1. 넓이가 9가 되는 다각형 찾기
	2. 귀납적으로 닮은 직사각형들의 닮음비와 넓이비의 관계를 탐구하기
	3. 귀납적으로 닮은 삼각형들의 닮음비와 넓이비의 관계를 탐구하기
	4. 귀납적으로 닮은 원의 닮음비와 넓이비의 관계를 탐구하기
	5. 닮은 도형의 넓이비가 닮음비의 제곱인 이유를 탐구하기
	6. 닮은 도형의 닮음비와 부피비의 관계를 추측하기

	7. 입체도형의 부피비와 넓이비와의 관계를 탐구하기
	8. 닮은 입체도형의 닮음비를 찾고, 넓이와 부피를 구하기
5차시	평면도형에서 닮음을 이용한 문제해결하기
에피소드	1. 전 차시 학습 내용 정리하기
	2. 비례 척도의 개념을 설명하기
	3. A형 닮은 삼각형의 넓이 비(또는 닮음비)를 이용한 넓이 구하기
	4. 닮음비를 이용한 다양한 문제 해결하기
	5. 닮음과 관련된 실생활 문제 제시
6차시	입체도형에서 닮음을 이용한 문제해결하기
에피소드	1. 실제의 길이가 주어졌을 때, 비례 척도를 적용하여 모델의 길이 구하는 문제 해결하기
	2. 닮음비와 모델의 넓이가 주어졌을 때, 실제 넓이 구하는 문제 해결하기
	3. 밑변과 높이가 변화하였을 때, 부피의 변화 탐구하기
	4. 닮음비가 주어진 원뿔의 부피를 구하기
	5. 부피가 주어진 두 닮은 도형의 닮음비 구하기
	6. 비례 척도를 활용한 문제 해결하기
	7. 지난시간 제시한 실생활 문제 해결하기

Abstract

A Case Study of Sociomathematical Norms Emerged in Mathematics Classroom of Master Teacher in Korea and of Lead Teacher in Singapore.

Cho, Hyungmi
Department of Mathematics Education
The Graduate School
Seoul National University

This study is a starting point to understand the cultural characteristics of Korean mathematics classroom, and was carried out by the necessity of urging the attention of Korean mathematics classroom in comparative study of mathematics classroom. As growing interest of Singapore education, which has achieved excellent performance in international comparative studies on academic achievement, the purpose of this study is to analyze the characteristics of classroom culture in mathematics classrooms in Korea and Singapore.

Especially, in order to interpret the cultural characteristics of mathematics classrooms, we searched micro-classroom culture focusing on Paul Cobb's sociomathematical norms which integrates the viewpoint of constructivist and socio-cultural perspective. Research on sociomathematical norms conducted by Cobb has been focused on the reform of teaching methods in the classroom

and the development of specific mathematical discussion in the classroom with the help of the research team. In this classroom, the teacher plays a role of mediating carefully so that these discussions and conversations gradually become more resemblance to more sophisticated mathematical aspects. In this study, while sociomathematical norms is not considered only as a mathematical culture that was achieved as a result of a teacher's specific intervention strategies, the meaning of sociomathematical norms is expanded, including the teacher's intervention in mathematical discussion as norms supported by the teacher, and containing thought and discussion patterns, metacognition, logical reasoning, and heuristic for problem solving.

The sociomathematical norms can be emerged in the process of creating meaning which teachers and students interpret about the actions. In other words, social actions of individual are the phenomenon that takes place when interpreting the meaning given to the action of oneself and others rather than consistent phenomenon to follow the certain rules. So, the meaning can be different depending on how students are being interpreted in the classroom in which they are using it.

However, seeing the phenomenon of the mathematics classroom from an interpretive perspective or a micro-perspective, it is possible that the social and historical contexts in which the behavior and interaction of teachers and students take place, and the external factors such as politics and economy which restrict education are overlooked. The actions of students and teachers and giving meaning to the actions are not made in the classroom that is disconnected from the outside. It is narrowly influenced by the structure and culture of the school, and is broadly influenced by the social, economic and cultural characteristics of the community to which it belongs. In order to understand and explain the educational phenomena, it is necessary to combine a micro perspective that enables insight into the nature of education-related behaviors and a macro perspective that focuses on social structural characteristics that regulate individual behavior.

In this study, mathematics classrooms of a master teacher in Korea and a lead teacher of Singapore were selected as case of both country. I analyzed sociomathematical norms which were emerged in master teacher A’s classroom in Korea and in lead teacher B’s classroom in Singapore from interpretive perspective, focusing on the discourse, action, and their meaning.

The sociomathematical norms in the two exemplary teachers' classrooms were identified in eight categories. Among the sociomathematical norms of these eight categories, what have been revealed through prior research were 'what is acceptable as a mathematical explanation', 'what is mathematically different,' 'what is easy and difficult', and 'what is effective'. However, sociomathematical norms about 'how to use mathematical problem solving strategies', 'what concepts accepted in mathematics classrooms', and 'how to use mathematical expressions' are newly discovered through this research.

The expanded concept allowed me to analyze the sociomathematical norms of the lead teacher B's classroom in Singapore, centered on the sophisticated descriptions of the teacher. In the Singapore lead teacher's classroom, students are more likely to listen and understand the teacher's explanations and to have individual learning. Therefore, if I analyzed sociomathematical norms as teachers' mediating roles on mathematical discussions, it would not be easy to reveal the sociomathematical norms about the students' solutions and the lead teacher's explanations. Especially, in relation to the metacognition and the problem solving, the 'the norms for how to set up a strategies for problem solving" in the mathematics classroom of the Singapore lead teacher B comprised more than 40% of the whole sociomathematical norms. This norm appeared variety aspects in many episodes in the classroom. Explaining and asking herself loudly, the lead teacher's formed the norms.

This study attempted to interpret the relationship between the micro-culture of the classroom and the institutional level outside the school. The problem solving and metacognitive strategies emphasized in the national curriculum of Singapore were analyzed to have influenced the emergence of the sociomathematical norms which are mainly found in the lead teacher's classroom. In addition, 'the norms about how to express the process of problem solving and proof' presented different aspects in the way of expression the strictness according to the format expected from paper-pencil tests.

The Korean master teacher and the lead teacher in Singapore who participated in this study are excellent teachers in each country. These teachers' lessons show perspective on what are the good mathematical teachings that are shared in each country, through these lessons. So, I will be able to deduce the image of a good teaching in each country. The Singapore lead teacher's lessons were a mathematically rigorous and clear instructional class, so this made students to use mathematical symbols and terminologies in a logical, concise, and accurate manner. Also, she

has taught students to monitor and control their thinking. On the other hand, Korean master teacher has focused on learner-centered classroom through group activities rather than verbal lectures. Certain pedagogical practices of the master teacher in Korea were concerned with prevalent private tutoring, and educational philosophy of the teacher.

This study, which is a comparative analysis of one master teacher's classroom in Korea and one lead teacher's classroom in Singapore, enriches the insider point of view of Korean mathematics classroom and also extend outsider perspective the understanding of characteristics of mathematics classroom in each country.

keywords : Classroom Culture, Sociomathematical Norms, Community Of Practice, Master Teacher, Lead Teacher
Student Number : 2011-30448